Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ   004.94:62.5:51.74   Қолжазба құқығында

КАРЫМСАКОВА НУРГУЛЬ ТЛЕТАЕВНА

Басқаруы шектелген динамикалық жүйелердің басқарылу критерийлерін құру

6D070100 – Автоматтандыру және басқару

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
т.ғ.д., доцент Джомартова Ш. А.
Шетелдік ғылыми кеңесші:
профессор Никулин В.В.
(Бингемтондағы Нью-Йорк мемлекеттік
университеті, АҚШ)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2022

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Ұсынылып отырған ғылыми жұмыста келесі нормативтік құқықтарға сілтеме жасалған:

«Ғылыми жұмыс пен аңдатпаны растау жөніндегі нұсқаулық»,
ҚР білім және ғылым министрлігінің ЖАК 2004 жылғы 28 қыркүйектегі №377-3ж.

МЕМСТ 7.32-2001 – Ғылыми-зерттеу жұмысына есеп. Құрылымы мен рәсімдеу ережелері.

МЕМСТ 7.1-2003 – Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама.

МЕМСТ 4.480-87 – Өнім сапасы көрсеткіштерінің жүйесі. Өнеркәсіптік роботтар. Негізгі көрсеткіштердің номенклатурасы

МЕМСТ 12.2.072-98 – Өнеркәсіптік роботтар. Роботтандырылған технологиялық кешендер. Қауіпсіздік талаптары және сынау әдістері

МЕМСТ 25686-85 – Манипуляторлар, автооператорлар және өндірістік роботтар. Терминдер мен анықтамалар

ГОСТ Р 60.0.0.3-2016 – Роботтар мен роботтандырылған құрылғылар. Координаттар жүйесі және орын ауыстыруды белгілеу

АНЫҚТАМАЛАР

Автономдық (autonomy): адамның қатысуынсыз сыртқы ортаны қабылдау және қабылдаудың негізінде тапсырмаларды мақсатты түрде орындай білу.

Манипулятор (manipulator): бұл механизм, әдетте, бірнеше еркіндік дәрежесінде заттарды (бөлшектерді немесе құралдарды) ұстап алу және/немесе жылжыту мақсатында бір-біріне қатысты айналмалы немесе трансляциялық түрде қозғалатын сегменттер тізбегінен тұратын машина.

Робототехника (robotics): роботтарды жобалау, өндіру және қолдану ғылымы мен тәжірибесі.

Робот (robot): екі немесе одан да көп қозғалғыштық дәрежесінде бағдарламаланған, белгілі бір дербестікке ие және тапсырмаларды мақсатына сай орындау үшін сыртқы ортада қозғалуға қабілетті атқарушы механизм.

Робототехникалық құрылғы (robotic device): өндірістік роботтың немесе қызмет көрсететін роботтың сипаттамаларына ие, бірақ бағдарламаланатын ұтқырлық деңгейінің қажетті санына немесе белгілі бір дәрежеде дербестікке ие болмайтын механизм.

Робототехникалық кешен (robot system): бір немесе бірнеше роботтардан, олардың жұмыс органдарынан және роботтың функционалдық мақсатын (тапсырмасын) орындауды қамтамасыз ететін кез келген механизмдерден, жабдықтардан, құрылғылардан немесе датчиктерден тұратын кешен.

Адаптивті робот (intelligent robot): сыртқы ортаны қабылдау мен өзгерту және/немесе сыртқы көздермен өзара әрекеттесу және оның мінез-құлқын бейімдеу арқылы тапсырмаларды орындауға қабілетті робот.

Мобильді робот (mobile robot): өзінің басқаруымен қозғалуға қабілетті робот.

Өнеркәсіптік робот (industrial robot): үш немесе одан да көп қозғалыс дәрежесінде бағдарламаланатын, автоматты түрде басқарылатын, қайта бағдарламаланатын, өзгертілетін манипулятор, оны өндірістік автоматика қосымшалары үшін тұрақты орнатуға немесе жылжытуға болады.

Сервистік робот (service robot): өндірістік автоматика қосымшаларын қоспағанда, адамдарға немесе жабдыққа пайдалы тапсырмаларды орындайтын робот.

Басқару жүйесі (control system): роботтың механикалық құрылымын бақылауға және басқаруға, сондай-ақ сыртқы ортамен (жабдықтар мен пайдаланушылар) өзара байланыс орнатуға мүмкіндік беретін басқару логикасы мен күш функцияларының жиынтығы.

Адаптивті басқару (adaptive control): жұмысты орындау кезінде анықталған шарттарға байланысты басқару жүйесінің параметрлері реттелетін басқару тәртібі.

Контурлық басқару; CP-басқару (continuous path control; CP control): пайдаланушы берілген аймақтық орындар арасында роботтың қозғалу бағытын орната алатын басқару режимі.

Көшірмелі басқару (master-slave control): бастапқы (негізгі) құрылғының қозғалысын екінші құрылғылар шығаратын басқару режимі.

Позициялық бақылау; PTP - басқару (pose-to-pose control; PTP control): пайдаланушы роботтың қозғалысын тек берілген кеңістіктегі орындарды пайдалана отырып, осы кеңістіктегі орындардың арасындағы қозғалыс бағытын анықтамай орната алатын басқару тәртібі.

Сенсорлық бақылау (sensory control): роботтың қозғалысы немесе күші экстероцептивті датчиктерден шығатын сигналдармен басқарылатын басқару тәртібі.

Траекториялық басқару (trajectory control): бағдарламаланған жүру жылдамдығымен контурлық бақылау.

Өзіндік оқытумен басқару (learning control): алдыңғы циклдардан алынған тәжірибе автоматты түрде басқару параметрлерін және/немесе алгоритмдерді өзгерту үшін қолданылатын басқару тәртібі.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

ҚР БҒМ ҒК – Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігінің Ғылым комитеті

ЭЕМ – электронды-есептеуіш машина

ДҚБЖ – деректер қорын басқару жүйесі

АЕЖ – аналитикалық есептеу жүйесі

КІРІСПЕ

Диссертациялық жұмыстың өзектілігі. Әлеуметтік-экономикалық, техникалық, саяси және басқа да динамикалық процестердің көптеген модельдері қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы сипатталады. Осындай жүйелерді зерттеудің нәтижесі басым жағдайда идентификациялау, басқарылу және тиімді басқару есептерін құруға алып келеді. Бірінші және үшінші есептерді жалпы түрде шешуге арналған түпкілікті әзірленген математикалық әдістер бар. Мысалы, динамикалық программалау әдісі, Понтрягин әдісі, Кротов әдісі басқаруы шектелген динамикалық жүйелердің тиімді басқаруын анықтау есебі үшін жақсы зерттеу нәтижелерін көрсетеді. Тиімді басқару есебін шешпес бұрын, тұтастай алғанда, алдымен динамикалық жүйенің басқарылуын зерттеу қажет.

Динамикалық жүйенің басқарылуын зерттеу үшін қолжетімділік аймағын бағалауға негізделген кейбір тәсілдер бар екендігін айта кеткен жөн. Алайда тек басқаруы шектелмеген сызықтық жүйелер үшін қарастырылып отырған мәселені шешетін Каллман критериі алынған. Ал басқаруы шектелген жүйелерге арналған нәтижелер арасында, тіпті сызықты жүйелерде де осы мәселенің шешімі жоқ. Осылайша, басқаруы шектелген динамикалық жүйелердің басқарылуын зерттеу теория жүзінде және практикалық қолдану қырынан өзекті болып табылады.

Сонымен қатар, робототехникалық жүйелерді зерттеу кезінде бірқатар мәселелер туындайды: 1) робототехникалық жүйелер динамикасының математикалық моделінің теңдеулерін алу, 2) басқару критерийлерінің шарттарын тексеруді автоматтандыру.

n-буынды манипуляторының қозғалыс динамикасының математикалық моделін алу II түрдегі Лагранж теңдеуін зерттеуге негізделгені белгілі. Бірақ роботтың математикалық моделінің теңдеулерін шығару – бұл әртүрлі матрицалардың, олардың инверсияларының, айнымалылардың әртүрлі ауыстыруларының (қайта белгілеулерінің) көп орындалуынан тұратын табжылмас еңбек. Мұның бәрі мұқият және көп уақытты қажет ететін жұмысты талап етеді, оның орындалуын арнайы аналитикалық есептеу жүйесі орындай алады. Сондықтан роботтандырылған жүйелердің математикалық моделін алуды автоматтандыру кезек өзекті мәселе болып табылады.

Басқару қабілеттілігі критерийлерін тексерудің күрделілігі әртүрлі жүйелерді жасаушылардан жақсы математикалық мамандандырылған дайындықты талап етеді, бұл олардың қолданылу аясын кеңейтуге кедергі келтіреді. Сондықтан роботтандырылған жүйелердің математикалық моделінің басқарылу қабілеттілігі критерийлерінің шарттарын тексеруді автоматтандыру да өзекті мәселе болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталған сызықты және сызықты емес динамикалық жүйелердің жаңа басқару критерийлерін алу болып табылады.

Диссертациялық жұмыста қойылған мақсатқа жету үшін келесідей мәселелер шешілген.

1) сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын басқаруы шектелген динамикалық жүйелерге арналған басқарылу критерийлерін құру;

2) сызықты емес қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын басқаруы шектелген динамикалық жүйелерге арналған басқарылу критерийлерін құру;

3) роботтандырылған жүйелердің басқарылуын зерттеуді автоматтандыруға арналған процедуралар кітапханасын құру;

4) динамикалық жүйелердің басқарылуын талдауға арналған интервалдық процедуралар кітапханасын әзірлеу.

Диссертациялық жұмыстың ғылыми жаңалығы:

– басқаруы шектеулі сызықтық динамикалық жүйелердің басқарылу критерийі алынғандығында (интервалдық математика негізінде);

– басқаруы шектеулі сызықты емес динамикалық жүйелердің басқарылу критерийі алынғандығында(интервалдық математика негізінде);

– роботтандырылған жүйелердің математикалық моделінің теңдеулерін шығаруды автоматтандыруға мүмкіндік беретін дайын аналитикалық есептеу жүйесін қолдануда;

– интервалдық процедуралардың құрылған кітапханасында

Зерттеу әдістері. Зерттеуде келесідей білім бағыттарындағы әдістер қолданылды: басқарудың математикалық теориясы, шешімдер теориясы, интервалды талдау, заманауи жобалау жүйелері және ақпараттық жүйелерді құру.

Диссертациялық жұмыстың **зерттеу нысаны** роботтандырылған жүйелер болып табылады.

Зерттеу пәні роботтандырылған жүйелер динамикасының математикалық модельдері болып табылады.

Жұмыстың тәжірибелік маңыздылығы роботтандырылған жүйелердің динамикасын сипаттайтын теңдеулерді шығаруды автоматтандыратын жүйені құруда жатыр.

Жұмыстың ғылыми маңыздылығы, ең алдымен, роботтандырылған жүйелердің математикалық модельдерінің құрылысын автоматтандыруда, және олардың басқарылатындығын зерттеуде болып табылады.

Жұмыс нәтижелерінің қолданбалық мәні математикалық модельдерді құру және олардың әр түрлі салалар мен көліктерде басқарылатындығын зерттеу үшін автоматтандыру жүйесін қолдану мүмкіндігінде жатыр.

Қорғау туралы ережелер. Зерттеу нәтижелері бойынша келесі есептер шешілді:

– сызықтық динамикалық жүйелер үшін басқару критерийі алынды;

– сызықты емес динамикалық жүйелер үшін басқару критерийі алынды;

– роботтандырылған жүйелердің математикалық модельдерінің автоматтандырылған құрылымдық жүйесі жасалды;

– интервалдық процедуралар кітапханасы құрылды.

Қорғауға ұсынылған ғылыми ережелердің, тұжырымдар мен ұсыныстардың дұрыстығы математикалық аппараттарды дұрыс қолданумен, тәжірибелерді дұрыс ұйымдастырумен және оларды өңдеумен расталады; теориялық зерттеулер мен эксперименттік мәліметтер нәтижелерінің сапалық және сандық сәйкестігі; зерттеу нәтижелерін практикалық қолдану. Жүргізілген зерттеулердің сенімділігі теориялық есептеулердің және жасалған бағдарламалық қамтамасыздандыруда алынған эксперименттік мәліметтердің нәтижелерімен сәйкестігі, сондай-ақ оларды ғылыми әдебиеттерде келтірілген нәтижелермен салыстыру арқылы расталады.

Тақырыптың зерттеу бағдарламаларының жоспарларымен байланысы. Диссертациялық жұмыс ғылыми-зерттеу гранттық жұмыстардың күнтізбелік жоспарына сәйкес келесі приоритет бойынша жүргізілді: 3. Ақпараттық, телекоммуникациялық және ғарыштық технологиялар, жаратылыстану ғылымдары саласындағы ғылыми зерттеулер, ішкі приоритет бойынша: 3.5 Ақпараттық қауіпсіздік және деректерді қорғау әдістері мен жүйелері. Жоба тақырыбы бойынша ақпараттық қауіпсіздікке арналған технологиялар мен бағдарламалық қамтамасыз ету: 1.26 ҚР БҒМ ҒК Ақпараттық және есептеуіш технология институтының «Ақпаратты қорғаудың биометриялық әдістері мен құралдарын әзірлеу».

Диссертация құрылымына кіріспе, 4 бөлім, қорытынды, пайдаланылған әдебиеттер тізімі және қосымшалар кіреді.

Кіріспеде диссертациялық жұмыстың тақырыбының өзектілігін дәлелдейді. Зерттеу жұмысының мақсаты, объектісі, пәні және есебі тұжырымдалған. Зерттеу нәтижелері сипатталады, олардың ғылыми жаңалығы мен практикалық маңызы көрсетіледі. Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелерін апробациялау туралы мәліметтер келтірілген.

Бірінші бөлімде осы бағыттағы ғылыми жұмыстардың жалпы жағдайы талданады. Кешенді талдаудың негізгі әдістерін жасауға айтарлықтай үлес қосқан отандық және шетелдік ғалымдар атап өтіледі. Диссертациялық жұмыстың негізгі есептері тұжырымдалған.

Екінші бөлім жаңа интервалды математиканы классикалықпен салыстыруға, олардың басқарылатындығын зерттеуге қолдануға арналған. Интервалды талдау негізінде сызықтық және сызықты емес динамикалық жүйелер үшін басқарылу критерийлері алынады.

Үшінші бөлім қолданыстағы шешім әдістерін талдауға және роботтандырылған жүйелердің математикалық моделінің теңдеулерін шығаруды автоматтандыру мәселелерін құруға арналған. Аналитикалық есептеулер жүйесі C++ тілінде енгізілген.

Төртінші бөлім интервалдық функциялар кітапханасын сипаттауға арналған.

Қорытындыда диссертацияның негізгі нәтижелері мен тұжырымдары

Жұмыстың апробациясы. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері туралы халықаралық ғылыми конференцияларда, Есептеуіш және ақпараттық технологиялар институтының жыл сайынғы ғылыми конференцияларында, Қазақ ұлттық университетінің жас ғалымдары мен мамандарының ғылыми конференцияларында, сондай-ақ Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ «Жасанды Интелект және Big Data» кафедрасының ғылыми семинарларында есеп берілді. Шетелде тәжірибе өткізілді (қосымша А). Авторлық құқық объектісіне құқықтарды мемлекеттік тіркеу туралы 2 куәлік алынды (Қосымша Б).

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 15 (он бес) баспа жұмыс, оның ішінде 7 (жетеуі) - ҚР БҒМ БҒСБК ұсынған басылымдарда, 2 жұмыс «Scopus» халықаралық дәйексөздеу қорына кіретін журналда жарияланды («МҒТСҒО» АҚ-ның Scopus деректер қорына енгізілген журналда жарияланымның барлығы туралы анықтамамен расталады – В Қосымшасы).

Ғылыми жарияланымдар:

1. Карымсакова Н.Т. Управляемость линейных систем с ограниченным управлением // Материалы международный конференции студентов и молодых ученых «Фараби әлемі». – Алматы: Қазақ университеті, 2018. – 330 с.
2. Джомартова Ш.А., Карымсакова Н.Т., Исимов Н.Т., Зиятбекова Г.З., Мазакова А.Т. Программа перевода объемных изображений из Ply-формата в регулярную матрицу высот // Вестник Национальной инженерной академии РК. – 2018. – №3(69). – С.34-38.
3. Мазакова А.Т., Зиятбекова Г.З., Амирханов Б.С., Жолмагамбетова Б.Р., Карымсакова Н.Т. Комплекс программ трехмерной графики «3D-MAT» и его приложения //Вестник КазУТБ. – 2019. – № 1. – С.17-23.
4. Jomartova Sh.A., Nikulin V.V., Karymsakova N.T. Research of controllability of dynamical systems with constraints on control using interval mathematics// Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика. – 2019. –№ 2(102). – С.63-80.
5. Алиаскар М.С., Айпанов Ш.А., Тусупова С.А., Карымсакова Н.Т., Амирханов Б.С. Биометрическая идентификация человека по отпечаткам пальцев //Материалы научной конференции ИИВ МОН РК «Современные проблемы информатики и вычислительных технологий» 1-4 июля 2019. – С.83-88.
6. Исимов Н.Т., Мазаков Т.Ж, Карымсакова Н.Т., Жолмагамбетова Б.Р., Зиятбекова Г.З. Оптимальное управление эпидобстановкой //Труды 14-й международной азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», Кыргызская Республика, Иссык-Куль. – 20-31 июля, 2018. – С.250-258.
7. Исимов Н.Т., Мазаков Т.Ж., Карымсакова Н.Т. Исследование модели прогнозирования и управления эпидобстановкой с применением

нечеткого и интервального анализа //Научно-технический журнал «Вестник АУЭС», спец.выпуск. – 2018. – С.147-155.

8. Мазаков Т.Ж., Исимов Н.Т., Жолмагамбетова Б.Р., Карымсакова Н.Т., Ыдырышбаева М.Б. Об одном методе обработки экспертной информации //Материалы Ш международной научной конференции «Информатика и прикладная математика», часть 2. – Алматы. – 2018. – С.221-224.

9. Дасибеков Х.А., Дарибаева Г.Д., Карымсакова Н.Т., Жолмагамбетова Б.Р., Джомартова Д.Т., Мазакова А.Т. Применение программно-аппаратного комплекса психофизиологического тестирования для оценки нервно-психической устойчивости //Вестник КазУТБ. – 2019. – № 2. – С.12-21.

10. T. Zh. Mazakov, P. Kisala, Sh. A. Jomartova, G. Z. Ziyatbekova, N. T. Karymsakova. Mathematical modeling forecasting of consequences of damage breakthrough // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. – 2020. – Vol. 5, No 443. – pp. 116-124. // https://doi.org/10.32014/2020.2518-170X.111 (Scopus, процентиль 26)

11. Ш.А. Джомартова, Н.Т. Карымсакова, А.Т. Турсынбай, Б.Р. Жолмагамбетова. Применение интервального анализа для управляемости химического реактора // Вестник КазНИТУ им. К.И. Сатпаева. – Алматы, 2020. – № 2(138). – С. 517-522.

12. Абдиев Б., Карымсакова Н., Сатыбалдина Д. Мақсатты шабуылдардан қорғау жөніндегі сынақ (тестілік) іс-шараларын жүргізу// Вестник КазНИТУ им. К.И. Сатпаева. – Алматы, 2020. – № 3(139). – С. 189-198.

13. Джомартова Ш.А., Карымсакова Н.Т., Турсынбай А.С. Применение системы аналитических вычислений для вывода уравнений динамики робототехнических систем // Вестник КазАТК. – Алматы, 2020. – №2. – С. 207-213.

14. Ш. Джомартова, Н. Карымсакова, Б. Абдиев Критерий управляемости для следящей системы автоматического манипулятора// Вестник КазНИТУ им. К.И. Сатпаева. – Алматы, 2020. – № 5(141). – С. 615-620.

15. Mazakov T., Wójcik W., Jomartova Sh., Karymsakova N., Ziyatbekova G., Tursynbai A. The Stability Interval of the Set of Linear System // INTL Journal of Electronics and Telecommunications. – 2021. – Vol. 67, N. 2. – P.155-161. DOI: 10.24425/ijet.2021.135958

Авторлық құқықпен қорғалатын нысандарға құқықтардың мемлекеттік тізіліміне мәліметтерді енгізу туралы куәліктер:

1. «Аралық функциялар кітапханасы» 2020 жылғы 17 қаңтардағы №7576 авторлық құқықпен қорғалатын нысандарға құқықтардың мемлекеттік тізіліміне мағлұматтарды енгізу туралы куәлік (ЭЕМ-ға арналған бағдарлама),

авторлары: Зиятбекова Г.З., Мазақова Ә.Т., Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А., Қарымсақова Н.Т., Амирханов Б.С., Жолмагамбетова Б.Р.

2. «Аналитикалық есептеулер жүйесі» 2020 жылғы 21 қаңтардағы №7632 авторлық құқықпен қорғалатын нысандарға құқықтардың мемлекеттік тізіліміне мағлұматтарды енгізу туралы куәлік (ЭЕМ-ға арналған бағдарлама), авторлары: Зиятбекова Г.З., Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А., Мазақова Ә.Т., Қарымсақова Н.Т., Тұрсынбай А.Т., Сәметова А.А.

1 ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ БАСҚАРУ. МӘСЕЛЕНІҢ ЖАЙ-КҮЙІН ТАЛДАУ

1.1 Басқару мәселесі бойынша әдеби шолу

Басқарылатын динамикалық жүйелер теориясының өзекті мәселелерінің бірі – оларды басқару. Әр түрлі робототехникалық жүйелерді жобалау және пайдалану кезінде қажетті мақсатқа қол жеткізуді қамтамасыз ету қажет, яғни жүйенің басқарылатын қасиеті бар-жоғын алдын-ала анықтау қажет. Бұл үшін ресурстық қамтамасыз ету жеткілікті ме. Басқару мәселесі алғаш рет Р. Калманның еңбектерінде қарастырылды, ол сызықтық стационарлық жүйені басқаруға қажетті және жеткілікті шарттарды тұжырымдады [1]. Н.Н.Красовский стационарлық емес сызықтық жүйелер үшін басқарудың жеткілікті шарттарын алды [2]. Ал бұл мәселелерді басқаруға шектеулер болмаған кезде В. Н.Семенов [3], С. Гершвин және Д. Якобсон [4], Л. Хант [5] қарастырды. [6] жұмыста фазалық шектеулер кезінде сызықты емес жүйелердің басқарылу критерийі келтірілген. А. Ю. Федоровтың жұмысында [7] сызықтық емес жүйе үшін бастапқы жүйенің сызықтық жақындауы бойынша басқарудың Калман бойынша жеткілікті шартын көрсеткен. А. М. Ковалев [8] инвариантты әртүрлілік теориясында Ляпунов теңдеулері типінің жартылай туындыларында теңдеулер шешімдерінің болуын тексеруге дейін азайтылған сызықтық емес жүйелерді басқару критерийін ұсынды. Ю.В. Мастерков [9] сызықтық емес жүйенің Ғаламдық тұрақты басқарылу тұжырымдамасын енгізді және басқарудың осы түрінің жеткілікті шарттары көрсетілген. Мақала [10] сызықтық тұрақты емес жүйелер класы үшін деректерді іріктеуді басқаруға арналған. Классикалық Халанай теңсіздігі алдымен уақыт өте келе өзгеретін таңдамалы мәліметтер жүйесіне таралады. Содан кейін салыстыру принципі мен Халанайдың кеңейтілген теңсіздігі негізінде жаһандық біркелкі экспоненциалды тұрақтылықтың және тиісті жабық жүйенің асимптотикалық тұрақтылығының жаңа өлшемдері алынады. Сонымен қатар, күшейту синтезі мәселесін шешу алгоритмі ұсынылған. [11] мақалада Ли жартылай бос топтарындағы сызықтық жүйелердің бос емес ішкі көрінісі бар басқару жиынтығының негізгі қасиеттері зерттеледі. Бұл рұқсат етілген жағдайдан басқа, Ли жартылай бос топтарындағы сызықтық жүйелерде бос емес ішкі бөлігі бар бірнеше басқару жиынтығы болуы мүмкін және олар бірлікті қоршап тұрған дұрыс аудармаларда болатындығын көрсетеді. [12] жұмыста g-туындысы бар Стилтестің векторлық дифференциалды жүйесінің басқарылуы қарастырылады. Сызықтық жүйе үшін біртекті жағдайдың нақты шешімі жалпыланған матрицалық экспоненциалды функцияны құру арқылы алынады, ал гетерогенді шешімге сәйкес есепті Стилтестің импульстік дифференциалдық теңдеулер класына ауыстыру арқылы қол жеткізіледі. Сызықтық жүйелер теориясын талдау әдістеріне сүйене отырып, сәйкесінше сызықтық жағдай үшін Грамиан критерийі және дәреже критерийі белгіленеді. Сызықты емес жүйе үшін жергілікті және жаһандық шешімнің болуы белгілі тарту принципімен беріледі, ал сызықты емес жүйелер үшін басқару нәтижесі Красносельскийдің бекітілген нүкте теоремасымен көрінеді. Сызықтық және сызықтық емес жүйелерді модельдеу сәйкесінше теориялық нәтижелердің тиімділігін тексеру үшін жүзеге асырылады. [13] аталған жұмыста уақытқа тәуелді емес сызықтық жүйелер үшін оңтайлы автоматты басқарудың теориялық қасиеттері зерттеледі. Басқарудың мақсаты-басқару мәні нөлге тең болатын уақыттың ұзақтығын барынша арттыру (максималды автоматты басқару), сонымен қатар қалып-күйлер арасындағы берілген ауысуға қол жеткізу үшін жауап беру уақытын азайту (оңтайлы уақытты басқару). Мақалада [14-15] уақыт бойынша өзгеретін дискретті сызықты гаустық емес жүйелер үшін оңтайлы сүзгілеу мен оңтайлы басқару қарастырылады. В.И.Зубовтың еңбектерінде Р.Калманның квазисызықты жүйелер жағдайындағы нәтижелер жалпылама көрсетілген [16-17].

Қазақстанда басқару проблемаларына арналған көптеген ғалымдардың жұмыстары бар. А. О. Жәутіков [18], Д. С. Жұмабаев [19], С. А. Айсағалиева [20], Н.Н. Биярова [21], М. Н. Калимолдаева [22], З. Н. Мурзабекова [23], Т.Ж. Мазаков және Ш. А. Джомартова [24] сияқты ғалымдардың зерттеу еңбектерін айта кету керек.

Жоғарыда айтылғандардан көрініп тұрғандай, негізгі нәтижелер сызықтық жүйелер үшін алынған. Сызықтық емес жүйелер үшін басқарудың әмбебап құрылымдық критерийлері жоқ. Сызықтық емес жүйелерді зерттеу әр түрлі бағытта және әртүрлі әдістермен жүзеге асырылады: сызықтық жүйелерді талдау негізінде кеңістіктегі траектория жағдайына және басқаруға әр түрлі сызықтық емес және қосымша шектеулер жағдайында қарастырылады.

Соңғы жылдары Ресейде көптеген қорғалған диссертациялық жұмыстар басқару мәселесін зерттеудің өзектілігін көрсетеді [25-31].

1.2 Интервалды математика бойынша әдеби шолу

Қазіргі уақытта интервалды талдау көптеген елдерде белсенді дамып келеді. Бастапқыда интервалды әдістер компьютерлердегі дөңгелектеу қателерін автоматты түрде бақылау құралы ретінде пайда болды және кейіннен қазіргі қолданбалы математиканың бір бөліміне айналды.

Интервалды әдістер таза теориялық зерттеулерден әлдеқайда асып кетті және тиісті бағдарламалық жасақтаманы қолдана отырып, практикада кеңінен қолданылады. Нәтижесінде интервалды арифметика, интервалды алгебра, интервалды топология, есептеу математикасының есептерін шешудің интервалды әдістері, оңтайлы басқару, тұрақтылық және т.б. пайда болды.

Интервалды талдауға арналған алғашқы басылымды 1966 жылы Р. Е. Мур жасаған [32]. Ю. И. Шокин [33] 1981 жылы интервалды талдаудың негіздері мен оның әдістерін жүйелі түрде баяндады. Содан кейін 1982 ж. интервалды әдістер бойынша И. Назаренко, Л. В. Марченко-ның оқу құралы жарық көрді [34], ал 1986 ж. – С. А. Калмыковтың, Ю. И. Шокиннің, З. Х. Юлдашевтің шолу жоспарының монографиясы жарық көрді [35]. Бұл еңбектерде интервалды талдаудың негіздері мен әдістері жүйелі түрде баяндалған. Интервалды арифметика толығымен берілді және «классикалық» қатар оның бірқатар модификациялары мен жалпылаулары қарастырылды. Сызықтық алгебраның есептерін шешудің интервалды әдістері, дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған әдістер, сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешу әдістері қарастырылады. Еңбекте [36,37] интервалды математикалық күйлерге шолу жасалған.

Интервалды математика өзінің ары қарайғы дамуын жалғастыра берді. Әсіресе, [38] жұмыста сипаттамалар мен интервалдардың қасиеттеріне негізделген классикалық интервалды арифметикадағы тарату жағдайларын жіктеу теоремасының жаңа дәлелі ұсынылған. Салыстырмалы интервалға ауытқу көбейтіндісі түрінде интервалдарды ұсыну бөлінді; бұл көріністі дәлелдемелерде қолдану негізделген және интервал көбейтіндісінің ені үшін нақты формуланың қарапайым дәлелі алынды.

Интервалды арифметикамен қатар көптеген интервалдық алгоритмдердің негізі интервалдық кеңею ұғымы болып табылады. [39] жұмыста орталық интервалдардың жалпыланған кеңістігінде интервалды бейнелерді енгізу ұсынылады. Әр түрлі элементарлық функцияларға сәйкес келетін бірқатар элементарлық карталар құрылды. Орталық интервалдардың жалпыланған кеңістігінде анықталған квазидифференцияланған бейнелердің қасиеттері зерттелді.

Сызықтық емес алгебралық жүйелер үшін тармақтар мен шекаралардың көптеген интервалды әдістері туындылардың үздіксіздігі туралы нақты болжамға негізделген. Атап айтқанда, Ньютонның интервалдық әдістер теориясының көп бөлігі осы болжамға негізделген. Алайда, туындылардың үздіксіздігі осындай функцияларды анықтау үшін аймақ үшін тиімді бағалау алу үшін міндетті емес. Сонымен қатар, егер алғашқы туындылар секірулер түріндегі үзілістерге ие болса, онда Ньютонның интервалды әдістерін қолдануға бейімделген интервалдың кеңеюін алуға болады. Сонымен, минимакс немесе L – жуықтау сияқты мәселелерді сызықтық емес оңтайландыру мәселесін шектеусіз тұжырымдау арқылы оңай шешуге болады. [40] жұмыста унарлы операцияны және екілік операцияны интервалды тарату және есептеу әдісі, және жалпы «секіру» функциясы ұсынылады. Бұл функциялар автоматты дифференциалмен біріктіріледі және ЭЕМ математикалық қамтамасыз етуге қосылады.

Интервалды талдау идеялары тәжірибелік қызығушылыққа ие, бірақ оларды жүзеге асыру барысында үлкен қиындықтарға тап болады. Зерттеу барысында дәстүрлі әдістерді тек интервалды сандарға ауыстыру мүмкін емес екені белгілі болды. Осыған байланысты интервалдық деректер шеңберінде әртүрлі сандық әдістер қайта қаралатын көптеген жарияланымдар пайда болды [41].

Инженерлік ғылымдардағы процестерді реттеу мен басқару міндеттеріне ерекше назар аудара отырып, математикалық модельдеудің, имитациялаудың және оңтайландырудың жаңа әдістері [42] жұмыста көрсетілген. Ұсынылған әдістер интервалды математиканың негізгі тұжырымдамаларын және қарастырылып отырған инженерлік процестерді шешуге арналған құрылғыларды қолдануға негізделген. [43] жұмыста интервалдық сызықтық жүйелердің арнайы класы үшін толыққадамдық әдіс бойынша асимптотикалық фактордың сәйкес келуінің төменгі бағамы беріледі. Бұл бағалау әрдайым дәл мәнге сәйкес келетіндігі көрсетілген.

Көбінесе әртүрлі есептерді шешкен кезде жүйе матрицасының сипаттамалық көпмүшелік коэффициенттерін есептеу қажет, бірақ дәл есептеу өте үлкен шығындарды талап етеді, әсіресе жоғары деңгейлі интервалды матрицалар үшін. Сондықтан интервалды матрицаның интервалдық сипаттамалық көпмүшелерінің коэффициенттері бар интервалдар есептеледі. [44] жұмыста бірнеше есептеу әдістері ұсынылады және алынған интервалдың ені талданады.

В.А. Подчукаев, И. М. Светлов [45] Виет формулаларын векторлық-матрицалық жазуға негізделіп берілген гурвицке тән көпмүшені сүйемелдейтін интервалды көпмүшелердің Гурвиц матрицаларын құрудың аналитикалық әдісін ұсынды. Олар осы көпмүшенің гурвицтік қасиетін жоғалтуына әкелмейтін сипаттамалық көпмүшенің гурвиц коэффициенттерінің мүмкін болатын өзгерістерінің шекараларын құру мәселесін шешті.

Мәселелердің бірі – интервалды матрицалардың оң сенімділігін зерттеу болатын. [46] жұмыста симметриялық (NxN) матрицалардың интервалдық жиынының оң сенімділігін талдау алгоритмдерінің бірі келтірілген. Алгоритм зерттелетін интервалды жиын элементтерінің өзгеру интервалдарының соңында құрылған 2N-1 матрицаларының оң сенімділігін тексеруге дейін азаяды.

[47] мақалада сызықтық жүйенің бақылануы мен байқалу шарттары және Сильвестердің сызықтық көпмүшелік матрицалық теңдеуінің $N-2$ дәрежелі көпмүшелік матрицасына қатысты шешілу шарттары арасында бір-бірімен байланыс бар деген пікірлер келтірілген.

Практикалық есептерді шешу интервалды талдау теориясына жаңа әдістердің пайда болуына алып келеді. Мысалы, [48] – де электр энергиясы сапасының негізгі көрсеткіштерінің бірі – кернеудің номиналды мәннен ауытқуы үшін есептелген мәндерді интервалды бағалаудың дәлдігін арттыру әдісі ұсынылған. Бұл әдіс электр қабылдағыштың қысқыштарындағы кернеу мәнін және оның номиналды мәнін анық емес үшбұрышты сандар арқылы көрсетуге негізделген. Анық емес санның симметриялық функциясының формасы кернеудің рұқсат етілген ауытқуларының есептелген мәндерінің түзету шамасына әсер етпейтіні көрсетілген. [49] жұмыста бірінші ретті реакциялар үшін химиялық кинетиканың тікелей және кері есебі эксперименттік мәліметтерді өңдеудің интервалды есептері ретінде қарастырылады. Авторлар оларды шешудің қарапайым интервалды алгоритмдерін мысалдармен ұсынған және тексерген.

Интервалды талдау параметрлік белгісіз объектілері бар жүйелерді зерттеуде кеңінен қолданылды. Бұл жағдайда параметрлік белгісіздік объектінің параметрлерінің нақты мәндеріне жататын интервал ретінде анықталады.

А.П. Молчанов және М.В. Морозов [50] жүйенің матрицалық элементтеріне периодты интервалды шектеулері бар сызықты тұрақты емес басқару жүйелерін қарастырды. Ляпуновтың арнайы векторлық функциясымен салыстыру әдісіне сүйене отырып, мұндай жүйелердің тұрақтылығына жеткілікті жағдайлар жасалды. Кейбір қосымша шектеулермен алынған жағдайлар жеткілікті ғана емес, сонымен қатар қажет екенін көрсетті. Нәтижелер көп қырлы мерзімді шектеулері бар сызықты басқарылатын жүйелер жағдайында жалпыланған.

Интервалды әдістердің дамуына Ресей Ғылым академиясының Сібір филиалының ғалымдары үлкен үлес қосты [51, 52].

[53] жұмыста Шарый С.П. функцияның анықталу аймағын да, оның құндылық аймағын да ортақ адаптивті ұсақтау идеясына негізделген Ғаламдық оңтайландырудың интервалды әдістерінің жаңа класын ұсынады. Есептеу эксперименттерінің нәтижелерін, сондай-ақ таспа матрицалары бар интервалды сызықты жүйелердің шешімдер жиынтығын субоптималды сыртқы бағалау мәселесін шешудің жаңа тәсілін қолдануға әкеледі.

Фракталдық өлшем – бұл белгілі бір геометрияның күрделілігін сипаттау үшін қолайлы көрсеткіш, ал ұяшықтарды санау талдауы кеңінен қолданылатын фракталдық өлшемді бағалаудың тиімді және қолайлы әдісі екендігі дәлелденді. Алайда, суреттерге негізделген қораптарды санаудың дәстүрлі әдістері әрдайым дәл бола бермейді, әсіресе пиксельдің шектелуіне байланысты таяз масштабта. Бұл мақала ұяшықтардың әр масштабының ауытқуын жою және сенімді нәтижелерге қол жеткізу үшін фракталдарды құруға және қораптарды анықтауға негізделген әдісті ұсынуға бағытталған. Қарапайым және рекурсивті фракталдың бірнеше мысалдары математикалық анықтама мен осы мақаладағы интервалға негізделген қораптарды санау әдісінің дәлдігін тексеру үшін талданады [54].

Соңғы жылдары динамикалық жүйелерді модельдеу үшін интервалды арифметиканы қолдану үлкен қызығушылық тудыруда. Бұл зерттеулердің көп бөлігі сызықты емес дискретті карталар үшін бекітілген нүктелерді немесе төмен периодты терезелерді есептеу кезінде жүргізілді. Бұл зерттеу жұмысы логистикалық карта үшін периодты орбиталарды есептеудің егжей-тегжейлі әдісіне негізделген жаңа интервалды есептеуді ұсынады. Веб-диаграмманы қолдана отырып, интервалды арифметика талап еткендей, дұрыс сыртқы дөңгелектеу үшін үш дөңгелектеу жағдайы қолданылды. Ұсынылған әдіс әдебиетте жарияланған нәтижелермен және Matlab Intlab құралдар жиынтығымен алынған нәтижелермен салыстырылады. Салыстыру логистикалық картаны қолдана отырып, тоғыз тақырыптық зерттеу үшін жасалады. Сандық нәтижелер ұсынылған әдіс дәстүрлі әдістермен алынған интервалдарға қарағанда едәуір кіші интервалды беретіндігін айқын көрсетеді [55].

Мақалада [56] кері матрицаны есептеу үшін интервалды әдіс қолданылады.

Жоғарыда келтірілген шолудан интервалды талдау есептеу математикасының салыстырмалы түрде жаңа бағыты динамикалық жүйелердің әртүрлі қасиеттерін зерттеу үшін кеңінен қолданылатынын көре аламыз. Мұндай жүйелердің сапасына қойылатын негізгі талаптардың бірі - басқару талабы. Басқару мәселесін шешуде интервалды талдауды қолдану сызықтық жүйелер үшін шекті және сызықтық емес динамикалық жүйелер үшін жеткілікті шарттар алуға мүмкіндік береді. Бірақ интервалды математиканы қолдану кезінде зерттеушілер үлкен интервалды теңдеулерді шешуде қиындықтарға тап болады, сонымен қатар бұл шешімдер «шамадан тыс» болады, бұл іс жүзінде қатаң шектеу болып табылады. Жұмыста [57] классикалық интервалды математиканың шектеулерін «жеңілдетуге» мүмкіндік беретін жаңа интервалды математика енгізілді.

1.3 Компьютерлік алгебра бойынша әдеби шолу

Аналитикалық есептеу жүйелері (АЕЖ) – бұл қазіргі компьютерлік математиканы дамытудың жаңа бағыты. Олардың басты артықшылығы – есептеулерді аналитикалық түрде орындау мүмкіндігі және арифметикалық және басқа да көптеген есептеулерді кез-келген дәлдікпен және сандардың максималды (минималды) мәндерінде шектеусіз жүргізу мүмкіндігі.

АЕЖ ғылымның әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Әдетте, бұл жүйелерге сандық және аналитикалық есептеулерге арналған процедуралар, визуализация, бағдарламалау және нәтижелерді ұсыну құралдары кіреді. Осылайша, компьютерлік математика жүйелері ғылыми мәселелерді шешуге мүмкіндік беретін кең құралдар жиынтығын бір қабатқа біріктіреді.

Автоматтандырылған ғылыми-зерттеу жүйелерін қолданудың маңызды аспектілерінің бірі алгебралық өрнектерді түрлендіруді автоматтандыратын аналитикалық (символдық) есептеу жүйелері болып табылады: өрнектерді жеңілдетуден дифференциалдау мен интегралдауға дейін. Кез-келген математикалық модельді зерттеуші күн сайын осындай операцияларға тап болады. Компьютерлік алгебра жүйелері аналитикалық (символдық) есептеулерді орындау үшін арнайы процессормен жабдықталған. Оның негізі-аналитикалық есептеулер жүргізілетін формулалар мен формулалық түрлендірулердің бүкіл жиынтығын сақтайтын ядро.

АЕЖ алдымен алгебралық өрнектерді өңдеу процедураларының негізгі жиынтығын ұсынады: есептеу, алмастыру, жеңілдету, саралау. Содан кейін олардың негізінде неғұрлым күрделі операциялар жүзеге асырылады: қатарларға ыдырату, өрнектердің канонизациясы, нақты жағдайлардағы интегралдау. Әр түрлі пакеттермен олар көптеген салаларда қолданылады – аспан механикасының мәселелерін шешуден бастап алгоритмдерді теориялық зерттеуге дейін. Символдық интегралдау мәселесін шешу АЕЖ-ні жасанды интеллектпен байланыстырады – эвристикалық алгоритмдер белгілі бір жағдайларды тануды және олардың интегралдауды, сонымен қатар өрнектерді әртүрлі канондық формаларға жеңілдетуді және математикалық теоремаларды дәлелдеуді жүзеге асырады [58, 59].

Дамыған АЕЖ жүйесіне арнайы мәндермен жұмыс жасайтын операциялардың арасында келесідей негізгі функциялар кіреді:[60 - 67]:

- пайдаланушы арқылы басқаруды жеңілдету;
- әр түрлі типтерді орнату;
- ретке келтіру (арнайы канондық пішінге келтіру);
- сандық есептеулер (бүтін сандар аралығында шектеулердің болмауы, рационалдық арифметиканың болу қажеттілігі);
- көпмүшелік операциялар жиынтығы (ЕҮОБ, факторизация, әр түрлі базалар бойынша ыдырату);
- дифференциалдау;
- интегралдау;
- матрицалармен жұмыс.

Символдық есептеулер жүргізетін және аналитикалық формулалар түрінде нәтиже бере алатын ЭЕМ мен бағдарламалық жүйелер бұрыннан белгілі. Мұндай компьютерлерді жасаудағы жетекші рөлді бізде кеңестік академик В.М. Глушковтың мектебі алды. Бұл мектепте есептеулер жүргізу үшін «Аналитик» тілімен «Мир» сериясының шағын инженерлік ЭЕМ-дері құрылды. Өкінішке орай, алдағы уақыттарда компьютерлік техниканың бұл саласы тиісті деңгейде қолдау таппады және осындай құрығыларды жасау көшбасшылығы шетелдік әзірлеушілерге өтті.

Шетелде компьютерлік алгебраның дамуына нақты негіз жасаған muMATH, Macsyma, Reduce, Maple V, Mathematica және т.б. символдық операцияларға арналған бірқатар бағдарламалау тілдері мен бағдарламалық жүйелер құрылды. Бұл жүйелердің ішінде ең қарапайым және жаппай таралған жүйелердің бірі көптеген шағын және микро компьютерлерде енгізілген muMATH жүйесі болды. Soft Warehouse Inc. компаниясы (АҚШ) осы жүйенің негізінде соңғы жылдары Derive Math-ematical Assistant (бұдан әрі-жай Derive) шағын математикалық жүйесін әзірледі.

Derive-бұл жоғарыда аталып өтілген типтегі атақты жүйелердің бірі. Ол, ең алдымен білім беру жүйесіне бағытталған, соның ішінде жоғары білім беру жүйесіне ғана емес, сонымен қатар бастауыш (мектеп) білім беруге бағытталған жүйе болып табылады. Бұны жүйенің толық атауынан да көруге болады – Derive a Mathematical Assistant (Derive-математикалық ассистент) [68].

Компьютерлік символдық математиканы енгізу жаратылыстану және қолданбалы зерттеулерде компьютерлерді қолданудың түбегейлі жаңа мүмкіндіктерін ашты. Енді компьютерлерде аналитикалық есептеу әдістері қолданылмайтын жаратылыстану ғылымдарының саласын көрсету өте қиын. Символдық түрлендіру проблематикасының өзіне тән ерекшелігі-аналитикалық есептеулердің бағдарламалық жүйелерінде сандық емес математиканы тиімді жүзеге асыратын математикалық және алгоритмдік әдістердің заманауи бағдарламалау әдістерімен үйлесуі. Ондай әдістерге, мысалы, Macsyma, Reduce, АНАЛИТИК және т. б. сияқты танымал жүйелер кіреді.

Аналитикалық түрлендірулер ғылыми зерттеулердің ажырамас бөлігі болып табылатыны белгілі және көбінесе оларды жүргізуге зерттеулердің қалған бөліктеріне қарағанда көп уақыт жұмсалады, ал мамандандырылған әдістерді, мысалы, дифференциалдық теңдеулерді заманауи топтық талдау әдістерін жүзеге асыру үшін аналитикалық өрнектердің дәлдігі ерекше мәнге ие. Алайда, осы әдістердің кез-келгені бойынша қолмен есептеу өте көп уақытты қажет етеді. Бұл жерде компьютерлік алгебра әдістері және тиісті бағдарламалық жүйелер көмектеседі, олар қолмен есептеудің үлкен шығындарын талап ететін және ДК-де сандық есептеу кезінде дәлдікті жоғалтуға өте сезімтал осындай мәселелерді шешудің жалғыз құралы болып табылады.

Аналитикалық есептеулердің әдістері мен алгоритмдерінің арқасында қазіргі компьютер енді жалпы математикалық машина сияқты есептеулерге айналмайды. ДК символдық өрнектерді интегралдауды және саралауды жүзеге асыра алады, мүшелерді қайта құру және қайта топтастыру, оларды кейіннен түрлендіре отырып өрнектерге ауыстыру, дифференциалдық теңдеулерді шешу және т.б. аналитикалық есептеулер (АЕ) алгебралық алгоритмдерді әзірлеумен, талдаумен, іске асырумен және қолданумен айналысатын теориялық информатиканың ажырамас бөлігі болып табылады. Әдістер саласы АЕ-ден уақыт өте келе алыстап жатқанымен АЕ мақсаттары жасанды интеллект саласында жатыр. Сонымен қатар, әрекеттерде қолданылатын алгоритмдер аз және қарапайым математикалық құралдарды қолданады.

Осылайша, шын мәнінде АЕ тәуелсіз пән ретінде, бірнеше салалардың түйіскен жерінде жатыр: олар информатика, жасанды интеллект, заманауи математика (дәстүрлі емес әдістерді қолдану), бұл қасиеті бір уақытта АЕ-ді қамтиды сонымен қатар ғылыми-зерттеу жұмыстары саласында қиындатады. Бұл ғылыми пәннің атауы ұзақ уақыт бойы өзгеріп, француз тілінде «Calcul formel», ағылшын тілінде «Computer algebra» және орыс тілінде «аналитические вычисления» немесе «компьютерная алгебра» ретінде атауға тоқталды.

АЕ-нің ең интуитивті мақсаты формулалармен манипуляция жасауында жатыр. Қарапайым бағдарламалау тілдерінің (Фортран, Паскаль, Бейсик, ...) бірінде жазылған математикалық формула, айнымалылар мен параметрлерге сандық мәндер берілген кезде ғана есептеулер жүргізуге арналған.

АЕ қолданылатын тілдерде формулалар үшін сандық мәнді алуға болады, бірақ сонымен қатар ол формальды түрлендірулердің нысаны бола алады: дифференциялдау, қатарға бөлу, басқа да ыдыраулар және интегралдау.

Бүгінгі таңда әзірленген АЕ-нің интеллектісі олардың оқыту мен білім берудегі математикалық әдістер бойынша білім базасын ұйымдастыру үшін қолданылуымен анықталады. Оқытудың үш түрін бөліп көрсетуге болады: АЕ саласындағы мамандарды даярлау (студенттер мен аспиранттар); пайдаланушылардың кең ауқымымен АЕ-мен жұмыс істеуге үйрету (зерттеудің заманауи құралымен танысу) және математикалық және физикалық бейіндегі білім беруде АЕ-ні қолдану (бакалавриат курсы бойынша білім беруді қарқындату).

Қазіргі уақытта АЕ-ні жеті негізгі кластарға бөлуге болады: сандық есептеулерге арналған жүйелер, кестелік процессорлар, матрицалық жүйелер, статистикалық есептеулерге арналған жүйелер, арнайы есептеулерге арналған жүйелер, аналитикалық есептеулерге арналған жүйелер (компьютерлік алгебра), әмбебап жүйелер.

Әрбір компьютерлік математика жүйесі (КМЖ) өзінің архитектурасында немесе құрылымында ерекшеліктеріне ие. Дегенмен, қазіргі әмбебап КМЖ-ның келесі типтік құрылымы бар деген қорытындыға келуге болады:

Кірістірілген функциялар мен жүйелік операторлардың жеткілікті жиынтығын қамтамасыз ететін алдын-ала құрастырылған функциялар мен процедуралардың жиынтығы – жүйенің ядросы болып табылады және ол орталық орынды алып тұрады.

Интерфейс пайдаланушыға өз сұранымдарын ядроға жіберуге және дисплей экранында шешім нәтижесін алуға мүмкіндік береді. Қазіргі заманғы КМЖ интерфейсі танымал Windows операциялық жүйелерінің құралдарына негізделген және оларға тән жұмыстың ыңғайлы жүзеге асуын қамтамасыз етеді.

Ядроға қосылған функциялар мен процедуралар айтарлықтай тез орындалады. Сондықтан ядро көлемі шектеулі, бірақ оған сирек процедуралар мен функциялардың кітапханалары қосылады.

Жүйелердің мүмкіндіктерін түбегейлі кеңейтуге және оларды нақты пайдаланушылар шешетін міндеттерге бейімдеуге жүйелерді кеңейту пакеттері арқылы қол жеткізіледі. Бұл пакеттер (көбінесе кітапханалар) белгілі бір КМЖ бағдарламалау тілінде жазылады, бұл оларды қарапайым пайдаланушылардың қолдануына мүмкіндік береді.

Қазіргі заманғы компьютерлік математика жүйелерінің ядросы, кітапханалары, кеңейту пакеттері және анықтамалық жүйесі оның дамуының мыңжылдықтарында жинақталған математика саласындағы білімнің көрсеткіші болып табылады.

Алгебралық алгоритмдерге деген қызығушылықтың артуы алгоритмдердің информатикадағы орталық рөлін түсіну нәтижесінде пайда болды. Оларды ресми және қатаң тілде сипаттау оңай және олардың көмегімен ғасырлар бойы белгілі және зерттелген мәселелердің шешімін қамтамасыз етуге болады. Дәстүрлі алгебра конструктивті әдістермен айналысса да, компьютерлік алгебра осындай алгоритмдердің тиімділігі, іске асырылуы, сондай-ақ аппараттық және бағдарламалық аспектілеріне қызығушылық танытады. Алгебралық әдістердің тиімділігі мен өнімділігін анықтау туралы шешім қабылдау көптеген басқа құралдарды қажет етеді, мысалы, рекурсивті функциялар теориясы, математикалық логика, аналитика (талдау) және комбинаторика [69].

1.4 Зерттеу міндеттерінің қойылымы

Жоғарыда келтірілген шолудан негізгі нәтижелер сызықтық жүйелер үшін алынатын динамикалық жүйелерді басқару мәселесі өзекті мәселе болып табылатынын анық көруге болады. Сызықтық емес жүйелер үшін басқарудың әмбебап құрылымдық критерийлері жоқ. Осыған байланысты динамикалық жүйелердің қасиеттерін зерттеу үшін интервалды математиканы қолдану маңызды бағыт болып есептелінеді. Механикалық жүйелердің динамикасын зерттеуде интервалды талдауды қолдану басқарудың тиімді критерийін алуға мүмкіндік береді.

Диссертацияның мақсаты қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталған сызықтық және сызықты емес динамикалық жүйелерді басқарудың жаңа критерийлерін әзірлеу болып табылады.

Қойылған мақсатқа жету үшін диссертациялық жұмыста келесі **міндеттер** шешіледі.

1) сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын басқаруы шектелген динамикалық жүйелерді басқару критерийлерін құру;

2) сызықтық емес қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын басқаруы шектелген динамикалық жүйелерді басқару критерийлерін құру;

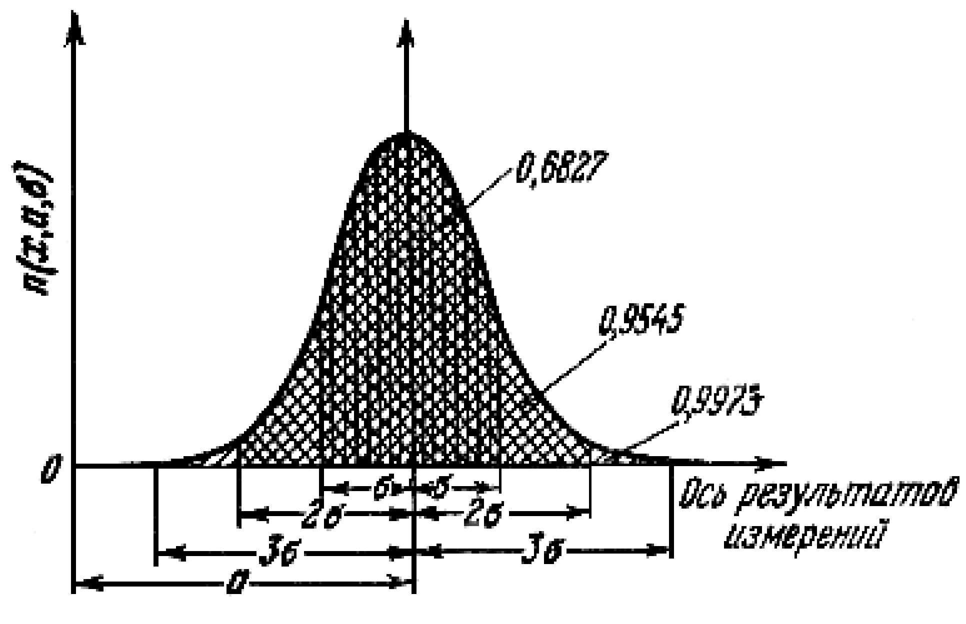
3) динамикалық жүйелердің басқарылуын зерттеуді автоматтандыру үшін процедуралар кітапханасын әзірлеу;

4) алынған нәтижелерді модельдік мысалдарда басқаруды талдау үшін қолдану.

2 ИНТЕРВАЛДЫ МАТЕМАТИКА НЕГІЗІНДЕ ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ БАСҚАРУДЫ ЗЕРТТЕУ

2.1 Екі интервалды математиктің салыстырмалы талдауы

Ғылыми зерттеулерде, техникада және жаппай өндірісте кез-келген шаманы (ұзындық, масса, ток күші және т.б.) өлшеу жиі қажет. Әр түрлі факторлардың әсерінен бірдей дәлдікпен бірдей өлшеу құралымен орындалатын бірдей объектінің өлшемдерін қайталаған кезде, бірдей деректер ешқашан алынбайды. Мұндай факторлардың қатарына аспаптың жекелеген бөліктерінің кездейсоқ тербелісі, орындаушының сезім мүшелерінің физиологиялық өзгерістері, арнайы ортадағы әртүрлі есепке алынбайтын өзгерістер (температура, оптикалық, электрлік және магниттік қасиеттер және т.б.) жатады. Кездейсоқ шашырау болған кезде әрбір жеке өлшемнің нәтижесін алдын-ала болжау мүмкін болмаса да, ол «қалыпты таралу қисығына» сәйкес келеді (1-сурет).



Сурет 1 – Қалыпты үлестіру қисығы

1-суреттен алынған нәтижелердің негізгі бөлігі өлшенетін объектінің белгісіз «шын мәні» жауап беретін белгілі бір орталық немесе орташа a мәніне жақын топтастырылатындығын көруге болады. Осы немесе басқа жақтардағы ауытқулар неғұрлым аз болса, мұндай ауытқулардың абсолютті мәні соғұрлым көп болады және σ - орташа квадраттық ауытқу шамасымен сипатталады. $a - \sigma$ - дан $a + \sigma$ - ға дейінгі аралықта жүргізілген қайта өлшеулердің барлық массасының 0,6287 (68,27%) мәніне тең үлесі орта есеппен көрсетіледі. $(a - 2\sigma, a + 2\sigma)$ аралығында барлық өлшемдердің орташа есеппен 0,9545 (95,45%) орналастырылады, ал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ аралығында орта есеппен 0,9973 (99,73%) орналастырылады, сондықтан өлшемдердің барлық санының тек 0,0027 (0,27%), яғни олардың маңызсыз үлесі «үш таңбалы» шектерден асып түседі [70].

«Классикалық» интервалдық арифметика интервалдың барлық мәндері бірдей болады деп болжайды. Сондықтан оның көмегімен алынған барлық нәтижелер барлық нәтижелерді қамтиды және «өте жеткілікті» болып табылады.

a интервалының формальды тұжырымдамасын келесі түрде енгізсек:

$$\boldsymbol{a} = \lfloor a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a \rfloor = (a, \varepsilon_a), \tag{2.1}$$

мұндағы a – интервалдың ортасы (немесе математикалық күту), ε_a – интервалдың ені (немесе дисперсия). Біз барлық интервалдардың жиынтығын $I_{вер}(R)$ деп белгілейміз.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – $I_{вер}(R)$ интервалдарынан алынған. Біз келесі интервалды арифметикалық амалдарды енгіземіз (интервалдар тәуелсіз қалыпты үлестірілген шамалар деп болжаймыз):

1. Екі интервалдың қосындысы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I_{вер}(R)$: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,

$$c = a + b; \qquad \varepsilon_c = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2} \tag{2.2}$$

2. Екі интервалдың айырмасы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I_{вер}(R)$: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$,

$$c = a - b; \qquad \varepsilon_c = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2} \tag{2.3}$$

3. Екі интервалдың көбейтіндісі $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I_{вер}(R)$: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$,

$$c = a \cdot b; \quad \varepsilon_c = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_b^2 + b^2 \cdot \varepsilon_a^2}; \tag{2.4}$$

4. Кері интервал $\boldsymbol{a} \in I_{вер}(R)$: $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$;

$$c = \frac{1}{a}; \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_a}{a^2} \tag{2.5}$$

5. Екі интервалдың бөліндісі $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I_{вер}(R)$: $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$;

$$c = \frac{a}{b}; \qquad \varepsilon_c = \sqrt{\frac{a^2 \cdot \varepsilon_b^2}{b^4} + \frac{\varepsilon_a^2}{b^2}} \tag{2.6}$$

1-теорема. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – $I_{вер}(R)$ интервалынан алынсын. Онда келесідей шарттар орындалады

1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}$; (коммутативтілік); (2.7)

2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$; $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c})$; (ассоциативтілік); (2.8)

3) $\boldsymbol{x}$=[0,0] және $\boldsymbol{y}$ =[1,1] – сәйкесінше қосу және көбейту үшін жалғыз бейтарап элементтер, яғни

$\boldsymbol{a}$= $\boldsymbol{x}$+ $\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{a}$+$\boldsymbol{x}$ барлық $\boldsymbol{a}$ интервалдары үшін;

$\boldsymbol{a}$= $\boldsymbol{y}$ * $\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{a}$* $\boldsymbol{y}$ барлық $\boldsymbol{a}$ интервалдары үшін;

4) нүктелік емес еркін $\boldsymbol{a}$ интервалы қосу немесе көбейту бойынша кері болмайды. Дегенмен,

$$0 \in \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a};\, 1 \in \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}.$$

5) $\bar{b} \cdot \bar{c} \le 0$ шарты кезінде субдистрибуитвтілік орындалады:

$$\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \subseteq \boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}. \qquad (2.9)$$

Дәлелдеу:

1) Коммутативтілікті дәлелдейміз. $\boldsymbol{c}$ =$\boldsymbol{a}$+$\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{d}$ =$\boldsymbol{b}$+$\boldsymbol{a}$ болсын. Онда (2.2) формула бойынша

$$c = a + b; \quad \varepsilon_c = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2};$$

$$d = b + a; \quad \varepsilon_d = \sqrt{\varepsilon_b^2 + \varepsilon_a^2};$$

болды. Осылайша, $\boldsymbol{c}$ = $\boldsymbol{d}$. $\boldsymbol{c}$ =$\boldsymbol{a}$*$\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{d}$ =$\boldsymbol{b}$*$\boldsymbol{a}$ болсын. Онда (2.4) формула бойынша

$$c = a \cdot b; \quad \varepsilon_c = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_b^2 + b^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$

$$d = b \cdot a; \quad \varepsilon_d = \sqrt{b^2 \cdot \varepsilon_a^2 + a^2 \cdot \varepsilon_b^2};$$

осылайша, $\boldsymbol{c}$ = $\boldsymbol{d}$.

2) Қосу үшін ассоциативтілікті дәлелдейміз. $\boldsymbol{d}$=$\boldsymbol{a}$+$\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{e}$=$\boldsymbol{b}$+$\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{f}$ = $\boldsymbol{d}$+$\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{g}$ = $\boldsymbol{a}$+$\boldsymbol{e}$ болсын. Онда (2.2) формуласына қойып, келесідей теңдікті аламыз:

$$d = a + b; \quad \varepsilon_d = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2};$$

$$e = b + c; \quad \varepsilon_e = \sqrt{\varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2};$$

$$f = d + c = a + b + c; \quad \varepsilon_f = \sqrt{\varepsilon_d^2 + \varepsilon_c^2} = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2};$$

$$g = a + e = a + b + c; \quad \varepsilon_g = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_e^2} = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2}$$

олай болса, $\boldsymbol{f}$ = $\boldsymbol{g}$.

Көбейту үшін ассоциативтілікті дәлелдейміз. $\boldsymbol{d}$=$\boldsymbol{a}$*$\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{e}$=$\boldsymbol{b}$*$\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{f}$ = $\boldsymbol{d}$*$\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{g}$ = $\boldsymbol{a}$*$\boldsymbol{e}$ *болсын.* (2.4) формулаға қою арқылы келесідей теңдіктерді аламыз:

$$d = a \cdot b; \quad \varepsilon_d = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_b^2 + b^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$
$$e = b \cdot c; \quad \varepsilon_e = \sqrt{b^2 \cdot \varepsilon_c^2 + c^2 \cdot \varepsilon_b^2};$$
$$f = d \cdot c = a \cdot b \cdot c;$$
$$\varepsilon_f = \sqrt{d^2 \cdot \varepsilon_c^2 + c^2 \cdot \varepsilon_d^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot \varepsilon_c^2 + c^2 \cdot a^2 \cdot \varepsilon_b^2 + c^2 \cdot b^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$
$$g = a \cdot e = a \cdot b \cdot c;$$
$$\varepsilon_g = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_e^2 + e^2 \cdot \varepsilon_a^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot \varepsilon_c^2 + a^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_b^2 + b^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$

осылайша, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$.

3) ***c***=***x***+***a***; ***d*** =***a***+***x***, болсын, мұндағы ***x***=[0,0] = (0,0). Онда,

$c = x + a = 0 + a = a; \quad \varepsilon_c = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_a^2} = \sqrt{0 + \varepsilon_a^2} = \varepsilon_a;$

$d = a + x = a + 0 = a; \quad \varepsilon_d = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_x^2} = \sqrt{\varepsilon_a^2 + 0} = \varepsilon_a;$

осылайша, ***c*** = ***d*** = ***a***.

c=***y*a***; ***d*** =***a*y*** *болсын, мұндағы* ***y***=[1,1] = (1,0). Онда

$$c = y \cdot a = 1 \cdot a = a;$$
$$\varepsilon_c = \sqrt{y^2 \cdot \varepsilon_a^2 + a^2 \cdot \varepsilon_y^2} = \sqrt{1 \cdot \varepsilon_a^2 + a^2 \cdot 0} = \varepsilon_a;$$
$$d = a \cdot y = a \cdot 1 = a;$$
$$\varepsilon_d = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_y^2 + y^2 \cdot \varepsilon_a^2} = \sqrt{a^2 \cdot 0 + 1 \cdot \varepsilon_a^2} = \varepsilon_a;$$

осылайша, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}$.

4) ***a*** – еркін нүктелік емес интервал болсын, яғни $\varepsilon_a \neq 0$; ***b*** - ***a***-ға қосу бойынша кері интервал. Содан кейін ***c***= ***a*** - ***b*** интервалы ***c*** = (0,0) нөлдік нүктелік интервал болуы керек. Алайда, $c = a - b$; $\varepsilon_c = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}$ анықтамасы бойынша $a = b$ және $\varepsilon_a = 0, \varepsilon_b = 0$ шартары орындалған жағдайда ғана мүмкін болады. Бұл ***a*** интервалы нүктелік емес екендігіне қайшы келеді.

$\boldsymbol{c}$= ***a*** - ***a***, болсын, онда $c = 0$ және $\varepsilon_c = \varepsilon_a \cdot \sqrt{2}$, яғни, ***c*** аралығы 0 нүктесін қамтиды. ***a***– еркін нүктелік емес интервал болсын, яғни $\varepsilon_a \neq 0$; ***b*** - ***a***-ға көбейту бойынша кері интервал және ***b*** ≠0. Онда $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ интервалы ***c*** = (1,0) бірлік нүктелік интервал болуы керек. Алайда, c= $\frac{a}{b}$; $\varepsilon_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_b^2}{b^2} + \frac{\varepsilon_a^2}{b^2}}$, анықтамасы бойынша, $a = b$ и $\varepsilon_a = 0, \varepsilon_b = 0$ шарттары орындалған жағдайда ғана мүмкін болады. Бұл ***a*** интервалы нүктелік емес екендігіне қайшы келеді.

5) ***d***=***a*b***; ***e*** =***a*c***; ***f*** = ***b***+***c***; ***g*** =***a*f***; ***h*** = ***d***+***e*** болсын. Олай болса,

$$f = b + c; \quad \varepsilon_f = \sqrt{\varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2};$$
$$g = a \cdot f = a \cdot b + a \cdot c;$$
$$\varepsilon_g = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_f^2 + f^2 \cdot \varepsilon_a^2} = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_b^2 + a^2 \cdot \varepsilon_c^2 + (b+c)^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$
$$d = a \cdot b; \quad \varepsilon_d = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_b^2 + b^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$
$$e = a \cdot c; \quad \varepsilon_e = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_c^2 + c^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$
$$h = d + e = a \cdot b + a \cdot c;$$
$$\varepsilon_h = \sqrt{\varepsilon_d^2 + \varepsilon_e^2} = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_b^2 + a^2 \cdot \varepsilon_c^2 + b^2 \cdot \varepsilon_a^2 + c^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$

осылайша, $b \cdot c \leq 0$ шарты орындалғанда $\boldsymbol{g} \subseteq \boldsymbol{h}$. Теорема дәлелденді.
x – $Mx = \nu$ математикалық күтумен (интервалдың ортасы) және $Dx = \sigma^2$ дисперсиямен (интервалдың ені) сипатталатын тәуелсіз бөлінген интервал болсын.

Аргументі өз кезегінде интервал болып табылатын, интервалнегізді функция $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{f(x)}$ берілсін. Бұл функцияның мәні $\boldsymbol{U} = (\bar{u}, \varepsilon_u)$, арқылы белгіленетін,

$u = f(\nu)$, $\varepsilon_u = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_\nu \sigma$ формуласымен анықталатын интервал болады. $x_1, x_2, \dots, x_n$ – $Mx_1 = \nu_1, Mx_2 = \nu_2, \dots, Mx_n = \nu_n$ математикалық күтумен (интервал ортасы) және $Dx_1 = \sigma_1^2, Dx_2 = \sigma_2^2, \dots, Dx_n = \sigma_n^2$ дисперсиямен (интервал ұзындығы) сипатталатын тәуелсіз таралған интервал болсын. $V = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ арқылы белгілейміз.

Аргументі өз кезегінде интервал болып табылатын, интервалнегізді функция $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{f(x)}$ берілсін. Бұл функцияның мәні $\boldsymbol{U} = (u, \varepsilon_u)$, арқылы белгіленетін

$$u = f(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n),$$

$$\varepsilon_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_n^2 \cdot \sigma_n^2} \qquad (2.11)$$

интервал болып табылады.

Алдыңғы параграфта енгізілген интервал арифметиканы «классикалықпен» салыстыру үшін келесі белгілерді енгіземіз:

$\boldsymbol{a} = \lfloor a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a \rfloor = (a, \varepsilon_a)$ -енгізілген интервал,

$\boldsymbol{a_k} = \lfloor a_k - \delta_a, a_k + \delta_a \rfloor$ - «классикалық» интервал.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – интервал, $\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{c_k}$ – «классикалық» интервал болсын. Алдағы уақытта біз интервалдың түрін нақты көрсетпейміз, бірақ оларды k индексі бойынша ажыратамыз.

1. Қосу (азайту) операциясы

$$c = a \pm b; \quad \varepsilon_c = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2};$$
$$c_k = a_k \pm b_k; \quad \delta_c = \delta_a + \delta_b.$$

Көріп отырғаныңыздай, жаңа интервалдың ені «классикалық» интервалдан аз. Мысалы, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{c_k} = \boldsymbol{a_k} + \boldsymbol{a_k}$ интервалдары үшін $c = 2a, c_k = 2a_k, \varepsilon_c = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_a, \delta_c = 2 \cdot \delta_a$ мәнін аламыз. Осылайша, екі интервалдың орталықтары сәйкес келеді, алайда енгізілген интервалдың ені √2 «классикалық» интервалдың енінен 2 есе аз.

Интервалдарды n-еселеп қосу үшін $c = na, c_k = na_k, \varepsilon_c = \sqrt{n} \cdot \varepsilon_a,\ \delta_c = n \cdot \delta_a$ аламыз. Енгізілген интервалдың ені «классикалық» интервалдың енінен $\sqrt{n}$ есе аз.

Мысал. $\boldsymbol{a} = [1.750, 2.250] = (2.0, 0.250)$ және $\boldsymbol{b} = [3.250, 4.750] = (4.0, 0.750)$ интервалдары берілсін.

Онда жаңа интервалды математика үшін келесідей нәтижелердң аламыз:

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [5.209, 6.791] = (6.0, 0.791)$,

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = [-2.791, -1.209] = (-2.0, 0.791)$,

дәл сол сияқты классикалық интервалды математика үшін:

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [5.0, 7.0] = (6.0, 1.0)$,

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = [-3.0, -1.0] = (-2.0, 1.0)$.

Осылайша, екі интервалдың орталықтары сәйкес келеді, бірақ енгізілген интервалдың ені (1.582) «классикалық» интервалдың енінен (2.0) аз.

2. Көбейту операциясы.

$$c = a \cdot b; \quad \varepsilon_c = \sqrt{a^2 \cdot \varepsilon_b^2 + b^2 \cdot \varepsilon_a^2};$$

$$c_k = \begin{bmatrix} min\begin{Bmatrix} (a_k - \delta_a) \cdot (b_k - \delta_b), (a_k - \delta_a) \cdot (b_k + \delta_b), \\ (a_k + \delta_a) \cdot (b_k - \delta_b), (a_k + \delta_a) \cdot (b_k + \delta_b) \end{Bmatrix} \\ max\begin{Bmatrix} (a_k - \delta_a) \cdot (b_k - \delta_b), (a_k - \delta_a) \cdot (b_k + \delta_b), \\ (a_k + \delta_a) \cdot (b_k - \delta_b), (a_k + \delta_a) \cdot (b_k + \delta_b) \end{Bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Көріп отырғанымыздай, $c_k \neq a_k \cdot b_k$, яғни «классикалық» көбейту кезінде интервал орталықтарының көбейтіндісі ығысады. Мысалы, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{a}$ және $\boldsymbol{c_k} = \boldsymbol{a_k} * \boldsymbol{a_k}$ интервалдары үшін $c = a^2$, $\varepsilon_c = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_a \cdot |a|$, $c_k = a_k^2 + \delta_a^2$, $\delta_c = 2 \cdot \delta_a \cdot |a_k|$ аламыз. Осылайша, енгізілген интервалдың ені «классикалық» интервалдың енінен $\sqrt{2}$ есе аз, ал «классикалық» интервалдың ортасы δ_a^2 мәніне ауысады.

Мысал. $\boldsymbol{a} = [1.750, 2.250] = (2.0, 0.250)$ және $\boldsymbol{b} = [3.250, 4.750] = (4.0, 0.750)$ интервалдары берілсін.

Онда жаңа аралық математика үшін келесідей нәтижелерді аламыз:

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = [6.197, 9.803] = (8.0, 1.803)$

Дәл солай классикалық интервал математика үшін де нәтиже келесідей болады:

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = [5.688, 10.688] = (8.188, 2.50)$,

Осылайша, енгізілген интервалдың ені (1.803) «классикалық» интервалдың енінен (2.50) аз және «классикалық» интервалдың орталығы 0.188 мәніне ауысады.

3. Кері аралықты есептеу операциясы

$$c = \frac{1}{a}; \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_a}{a^2};$$

$$c_k = \frac{a_k}{(a_k^2 - \delta_a^2)}; \quad \delta_c = \frac{\delta_a}{(a_k^2 - \delta_a^2)}.$$

Осылайша, енгізілген интервалдың ені «классикалық» интервалдың енінен аз және «классикалық» интервалдың ортасы белгілі бір мәнге ауысады.

Кері интервалдың «классикалық» есептеуінде $0 \notin \boldsymbol{a_k}$ деп болжанады. Кері интервалдың енгізілген анықтамасында $0 \in \boldsymbol{a}$, тек $a \neq 0$-ге рұқсат етіледі.

Мысал. $\boldsymbol{a} = [1.750, 2.250] = (2.0, 0.250)$ және $\boldsymbol{b} = [-0.250, 1.250] = (0.5, 0.750)$ интервалдары берілген.

Онда жаңа интервал математика үшін келесідей нәтижелерді аламыз:

$\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{\boldsymbol{a}} = [0.438, 0.563] = (0.50, 0.063)$,

$\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{\boldsymbol{b}} = [-1.00, 5.00] = (2.0, 3.0)$,

Дәл солай классикалық интервал математика үшін де нәтиже келесідей болады:

$\boldsymbol{c} = \dfrac{1}{\boldsymbol{a}} = [0.444, 0.571] = (0.508, 0.063)$,

$\boldsymbol{c} = \frac{1}{\boldsymbol{b}}$, болмайды.

Осылайша, $\frac{1}{\boldsymbol{a}}$ «классикалық» интервалының орталығы 0.08 мәніне ауысады.

4. Екі интервалды бөлу операциясы.

$$c = \frac{a}{b}; \qquad \varepsilon_c = \sqrt{\frac{a^2 \cdot \varepsilon_b^2}{b^4} + \frac{\varepsilon_a^2}{b^2}}.$$

$$c_k = (a_k - \delta_a, a_k + \delta_a) * \left(\frac{1}{(b_k + \delta_b)}, \frac{1}{(b_k - \delta_b)}\right).$$

Мысалыс, $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}$ және $\boldsymbol{c_k} = \frac{\boldsymbol{a_k}}{\boldsymbol{a_k}}$ интервалдары үшін

$$c = 1, \quad \varepsilon_c = \frac{\sqrt{2} \cdot \varepsilon_a}{|a|},$$

$$c_k = \frac{a_k^2 + \delta_a^2}{a_k^2 - \delta_a^2}, \quad \delta_c = \frac{2 \cdot \delta_a \cdot |a_k|}{a_k^2 - \delta_a^2}.$$

Енгізілген интервалдың ортасы 1-ге тең. «Классикалық» интервалдың орталығы 1-ден тұрса да, 1-ге қатысты ығысады.

$\varepsilon_a = \frac{a}{2}$ және $\delta_a = \frac{a_k}{2}$ үшін келсідей нәтижелерді аламыз:

$$\boldsymbol{c} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = [0.293, 1.707],$$

$$\boldsymbol{c_k} = [1.666 - 1.333, 1.666 + 1.333] = [0.333, 2.999].$$

Осылайша, енгізілген интервалдың ені 1.414 тең және 2.666 болатын «классикалық» интервалдың енінен аз. Сонымен қатар, «классикалық» интервалдың орталығы 1-ден 0.666-ға ауысады.

Мысал. $\boldsymbol{a} = [1.750, 2.250] = (2.0, 0.250)$ және $\boldsymbol{b} = [3.250, 4.750] = (4.0, 0.750)$ интервалдары берілсін.

Онда жаңа интервалды математика үшін келесідей нәтижелерді аламыз:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = [0.387, 0.613] = (0.50, 0.113)$$

дәл солай классикалық интервалды математика үшін де нәтиже келесідей болады:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = [0.368, 0.692] = (0.530, 0.162).$$

Осылайша, енгізілген интервалдың ені (0.113) «классикалық» интервалдың енінен (0.162) аз және «классикалық» интервалдың орталығы 0.030 мәніне ауысады.

Мысал. $\boldsymbol{a} = [1.750, 2.250] = (2.0, 0.250)$ және $\boldsymbol{b} = [-0.250, 1.250] = (0.5, 0.750)$ интервалдары берілсін.

Онда жаңа интервалды математика үшін келесідей нәтижелерді аламыз:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = [-2.021, 10.021] = (4.00, 6.021)$$

дәл солай классикалық интервалды математика үшін де нәтиже келесідей болады: $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$, болмайды.

5. Интервалды функцияларды есептеу операциясы

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ интервалдық аргументтің интервалмәнді функциясы болсын.

Онда $\boldsymbol{c}$=$\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{a}$) үшін аламыз: жаңа интервалды математика үшін

$$c = f(a), \quad \varepsilon_c = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_a \cdot \varepsilon_a \qquad (2.12)$$

Классикалық интервалды математика үшін

$$c_k = \frac{(f_{max} + f_{min})}{2}, \delta_c = \frac{(f_{max} - f_{min})}{2}, \qquad (2.13)$$

мұндағы, $f_{min} = \min\limits_{y \in a} f(y)\, , f_{max} = \max\limits_{y \in a} f(y)$

Жоғарыда келтірілген формулалардан көріп отырғанымыздай, жаңа интервалды математика бойынша функцияның мәндерін есептеудің сараланған функциялары үшін (2.12) арифметикалық амалдардың соңына байланысты конструктивті. Сонымен бірге (2.13) формулалары бойынша есептеулер екі оңтайландыру міндеттерін шешуді талап етеді, олардың әрқайсысын шешу үшін жалпы жағдайда итерациялық есептеулер жүргізу қажет. Бұл жағдайда итерациялық процестің конвергенциясы және бастапқы нүктені таңдау проблемалары туындайды.

Мысал. $\boldsymbol{a} = [1.750, 2.250] = (2.0, 0.250)$ және $\boldsymbol{b} = [-0.250, 1.250] = (0.5, 0.750)$ интервалдары берілсін. exp(a) және exp(b) интервалмәнді функция мәндерін есептеу қажет.

Онда жаңа интервалды математика үшін келесідей нәтижелерді аламыз: (2.12) формула бойынша

$$c = f(a) = 7.389, \qquad \varepsilon_c = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_a \cdot \varepsilon_a = 1.847.$$

Онда $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ = [5.542, 9.236] = (7.389, 1.847).

$\boldsymbol{b}$ интервалы үшін функция мәнін есептейміз

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ = [0.412, 2.885] = (1.649, 1.238).

$\boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{a}$) интервалдымәнді функцияның мәнін есептеу кезінде оны формула бойынша интервалдық қатарға ыдыратады

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} \tag{2.14}$$

нәтижесін аламыз (кесте 1).

Алғашқы 10 мүшесі бойынша қатарларға ыдырата отырып, интервалмәнді функцияның келесідей мәндерді алуға болады

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ = [6.837, 7.941] = (7.389, 0.552), $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ = [0.851, 2.446] = (1.649, 0.797).

Кесте 1 – Енгізілген интервалды математика арқылы есептелген exp(x) функциясының мәні

a аралығында функция мәні		b аралығындағы функция мәні	
аралық түрінде	(центр, диаметр) түрінде	аралық түрінде	(центр, диаметр) түрінде
[1.000, 1.000]	(1.000, 0.000)	[1.000, 1.000]	(1.000, 0.000)
[2.750, 3.250]	(3.000, 0.250)	[0.750, 2.250]	(1.500, 0.750)
[4.567, 5.433]	(5.000, 0.433)	[0.830, 2.420]	(1.625, 0.795)
[5.813, 6.853]	(6.333, 0.520)	[0.848, 2.443]	(1.646, 0.797)
[6.454, 7.546]	(7.000, 0.546)	[0.850, 2.445]	(1.648, 0.797)
[6.715, 7.819]	(7.267, 0.552)	[0.851, 2.446]	(1.649, 0.797)
[6.804, 7.908]	(7.356, 0.552)	[0.851, 2.446]	(1.649, 0.797)
[6.829, 7.933]	(7.381, 0.552)	[0.851, 2.446]	(1.649, 0.797)
[6.835, 7.939]	(7.387, 0.552)	[0.851, 2.446]	(1.649, 0.797)
[6.837, 7.941]	(7.389, 0.552)	[0.851, 2.446]	(1.649, 0.797)

Енді $\boldsymbol{a}$ интервалындағы функцияның мәнін классикалық интервалды математика формулаларына сәйкес есептейміз $f_{min} = 5.755, f_{max} = 9.488$, $c_k = 7.621, \delta_c = 1.867$. Онда $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ = [5.755, 9.488] = (7.621, 1.867).

Сол сияқты, біз классикалық интервалды математиканың формулалары бойынша $\boldsymbol{b}$ интервалдағы функцияның мәнін есептейміз $f_{min} = 0.779, f_{max} = 3.490$, $c_k = 2.135, \delta_c = 1.365$ және $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ = [0.779, 3.490] = (2.135, 1.365).

Функцияның мәнін қатардағы ыдырауда (2.14) классикалық арифметикалық амалдарды қолдана отырып есептейміз (2-кесте).

Кесте 2 – Классикалық интервалды математиканы қолдана отырып есептелген exp(x) функциясының мәні

a интервалдағы функция мәні		*b* интервалдағы функция мәні	
интервал түрінде	(центр, диаметр) түрінде	интервал түрінде	(центр, диаметр) түрінде
[1.000, 1.000]	(1.000, 0.000)	[1.000, 1.000]	(1.000, 0.000)
[2.750, 3.250]	(3.000, 0.250)	[0.750, 2.250]	(1.500, 0.750)
[4.281, 5.781]	(5.031, 0.750)	[0.594, 3.032]	(1.813, 1.219)
[5.164, 8.003]	(6.427, 1.253)	[0.529, 3.357]	(1.943, 1.414)
[5.565, 8.747]	(7.156, 1.591)	[0.508, 3.458]	(1.983, 1.475)
[5.702, 9.228]	(7.465, 1.763)	[0.504, 3.484]	(1.994, 1.490)
[5.718, 9.432]	(7.575, 1.857)	[0.502, 3.490]	(1.996, 1.494)
[5.745, 9.473]	(7.609, 1.864)	[0.502, 3.490]	(1.996, 1.494)
[5.755, 9.487]	(7.621, 1.866)	[0.502, 3.490]	(1.996, 1.494)
[5.755, 9.487]	(7.621, 1.866)	[0.502, 3.490]	(1.996, 1.494)

Мысал. $\boldsymbol{a} = [0.250, 0.750] = (0.5, 0.250)$ интервалы берілсін. sin($\boldsymbol{a}$) интервалмәнді функциясының мәнін есептеу керек.

Содан кейін жаңа интервалды математика үшін келесі нәтижелерді аламыз: (2.12) формула бойынша келесідей нәтижелерді аламыз:

$c = f(a) = 0.479,\ \varepsilon_c = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_a \cdot \varepsilon_a = 0.219.$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ = [0.260, 0.698] = (0.479, 0.219).

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ интервалмәнді функцияның мәнін есептеу кезінде оны формула бойынша интервалдық қатарға ыдыратып

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} \qquad (2.15)$$

нәтижесін аламыз

Кесте 3 – Енгізілген интервалды математика көмегімен есептелген sin(a) функциясының мәні

a интервалында функция мәні	
интервал түрінде	(центр, диаметр) түрінде
[0.250, 0.750]	(0.500, 0.250)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)
[0.228, 0.730]	(0.479, 0.251)

Осылайша, алғашқы 10 мүшені қатарға бөліп, интервалдық функцияның келесі мәнін аламыз

f(***a***) = [0.229, 0.730] = (0.479, 0.251).

Енді біз классикалық интервалды математика формулалары бойынша ***a*** интервалдағы функцияның мәнін есептейміз

$$f_{min} = 0.247, f_{max} = 0.682, \;\; c_k = 0.465, \delta_c = 0.217.$$

Онда ***f***(***a***) = [0.247, 0.682] = (0.4651, 0.217).

Функцияның мәнін қатардағы ыдырауда (2.15) классикалық арифметикалық амалдарды қолдана отырып есептейміз (4-кесте).

Кесте 4 – Классикалық интервалды математиканы қолдана отырып есептелген *sin(**a**)* функциясының мәні

a интервалында функция мәні	
интервал түрінде	(центр, диаметр) түрінде
[0.250, 0.750]	(0.500, 0.250)
[0.180, 0.748]	(0.464, 0.284)
[0.180, 0.750]	(0.465, 0.285)
[0.180, 0.750]	(0.465, 0.285)
[0.180, 0.750]	(0.465, 0.285)
[0.180, 0.750]	(0.465, 0.285)
[0.180, 0.750]	(0.465, 0.285)
[0.180, 0.750]	(0.465, 0.285)
[0.180, 0.750]	(0.465, 0.285)
[0.180, 0.750]	(0.465, 0.285)

Жоғарыда келтірілген нәтижелерден көріп отырғанымыздай, exp, sin функциясының мәндерін жаңа интервалды математиканың формулалары бойынша бірінші 10 мүшеге бөлу арқылы есептеу кезінде (2.12) формуласы бойынша есептеуге қарағанда «сығылған» интервалдар алынады. Классикалық интервалды математиканың формулалары бойынша бірінші 10 мүше бойынша қатарға ыдырайтын exp, sin функциясының мәндерін есептеу кезінде (2.13) формулалары бойынша есептеуге қарағанда «созылған» интервалдар алынады.

2.2 Сызықты жүйелердің басқарылуы

2.2.1 Басқаруы шектелген динамикалық жүйелер үшін басқарудың тұжырымдамалары мен анықтамасы

Басқару мәселесі алғаш рет Р. Калманның [1] еңбектерінде қарастырылған, ол сызықтық стационарлық жүйені басқаруға қажетті және жеткілікті жағдайларды тұжырымдады.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.16}$$

мұндағы A – n×n-тұрақты матрица, B – n-өлшемді тұрақты вектор
Р. Кальман келесі анықтаманы берді. Егер t_0 және t_1, $t_1 > t_0$ кез келген уақыт моменттері x_0 және x_1 кез келген берілген күйлер үшін $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, бастапқы күйін $x(t_0) = x_0$ соңғы $x(t_1) = x_1$ күйіне айналдыратын болса, жүйе (2.16) толығымен басқарылатын деп аталады.
Толық басқарылатын шарт Кальман теоремасымен берілген.

Теорема (Калман). (2.16) сызықтық жүйе өлшемі nxn матрицасының $W = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ рангі n-ге тең болған кезде ғана толық басқарылады.

Сонымен қатар, басқарудағы шектеулерді ескере отырып, сызықтық стационарлық жүйенің басқарылуы бастапқы және соңғы шарттарды сипаттауға байланысты емес.

Басқару шектеулері, фазалық шектеулер және зерттелетін жүйенің сызықтық емес жағдайында t_0 және t_1, $t_1 > t_0$ және x_0 и x_1 күйлерінің барлық уақыт параметрлері бақылау анықтамаларына енгізілген. Әдебиетте, әдетте, нөлдік нүкте (координата басы) x_1 соңғы күйі ретінде қабылданады және нөлдік бақылау анықтамасы енгізіледі.

Ескерту. Негізінде бұл маңызды емес, координаталарды ауыстыру арқылы сіз әрқашан x_1 соңғы күйін нөлге тең ете аласыз.

Әдетте екі мәселе қарастырылады.

Басқару мәселесі. Динамикалық жүйені $t_1 - t_0$ уақытында x_0 бастапқы күйінен соңғы x_1күйіне ауыстыратын шектеулі басқарылу бар ма.

Қолжетімділік мәселесі. $t_1 - t_0$ кезінде бастапқы x_0 күйінен соңғы x_1-ге басқару шектеулері бар аймақты бағалау.

2.2.2 Сызықты жүйелердің басқарылуын зерттеуде интервалды талдаудың қолданылуы

Сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталған басқару жүйесі қарастырылады

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.17}$$

мұндағы A – n×n-тұрақты матрица, B – n-өлшемді тұрақты вектор, x – n-өлшемді жүйе күйінің векторы, u – скалярлық шектеу:

$$-L \leq u(t) \leq L, t \in [0, T] \tag{2.18}$$

(2.17) дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши теоремасының шарттары орындалатындықтан, кез келген берілген үзіліссіз функциялар $u(t) \in C[0, \mathrm{T}]$ және x_0 бастапқы күйлері үшін шешім бар $x(t) \in C^1[0, \mathrm{T}]$ бір.

(2.18) шектеуді қанағаттандыратын және (2.17) аударма жүйесін бастапқы күйден қанағаттандыратын басқарудың бар-жоғын анықтау міндеті қойылады

$$x(0) = x_0 \tag{2.19}$$

ақырлы берілген күйде

$$x(T) = x_{\text{Т}} \tag{2.20}$$

мұндағы Т – берілген уақыт.

(2.18) түрдегі басқаруға шектеулер болған кезде тапсырманы зерттеу белгілі бір қызығушылық тудырады, өйткені әлі де тиімді критерийлер жоқ [71]. Сонымен қатар, нәтижелерді бақылау әсеріне бекітілген ұштары мен шектеулері бар қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталған жүйелерді оңтайлы басқарудың практикалық есептерін шешуде қолдануға болады. Атап айтқанда, (2.17) типтегі теңдеулер роботтық немесе электроэнергетикалық жүйелерді сипаттай алады, онда A матрицасы мен B векторының коэффициенттері параметрлер арқылы анықталады (салмақ, метрикалық сипаттамалар, инерция және т.б.), олар әдетте кейбір қателіктермен есептеледі.

(2.17) теңдеудің шешімін келесі түрде көруге болады

$$x(t) = x(0) + \int_0^t Ax(\tau)d\tau + \int_0^t Bu(\tau)d\tau, t \in [0, T]. \tag{2.21}$$

(2.21) теңдеуі екінші типтегі Вольтерр интегралдық теңдеуінің ерекше жағдайы [72, 73]

$$y(t) = f(t) + \mu \int_0^t K(t,\tau)y(\tau)d\tau , \tag{2.22}$$

мұндағы

$$y(t) = x(t); f(t) = x(0) + \int_0^t Bu(\tau)d\tau ; K(t,\tau) = A; \mu = 1. \tag{2.23}$$

2-теорема. (2.21) теңдеуінде $u(t) \in C[0, \text{Т}]$ берілген үзіліссіз функция үшін (2.18) шартты қанағаттандыратын жалғыз үзіліссіз шешім бар. Бұл шешімді $x(t) = \left(E + At + \frac{1}{2}A^2 * t^2 \dots + \frac{1}{k!}A^k * t^k + \cdots\right) * f(x)$ формуласы арқылы табуға болады.

Дәлелдеу. А матрицасы мен бастапқы шарт векторы X_0 матрицасы тұрақты болғандықтан, векторлық функция $f(t) = x(0) + \int_0^t Bu(\tau)d\tau$ ($u(t) \in C[0, \text{Т}]$ берілген функция үшін, (2.18) шартын қанағаттандыратын) үзіліссіз және шектелген, онда 1 теоремасының барлық шарттары орындалады [72,73].

(2.22) теңдеуі үшін Вольтерр операторын келесіден белгілейміз

$$Qy = \int_0^t K(t,\tau)y(\tau)d\tau$$

Вольтерр операторының қайталанатын ядросын анықтаймыз:

$$Q^n y = \int_0^t K_n(t,\tau)y(\tau)d\tau,$$
$$K_n(t,s) = \int_s^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau,$$
$$R(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\tau,s).$$

$M = \sup\limits_{0\le t,s\le T} |K(t,s)| \le \|A\|$ болсын. Онда қайталанатын ядро үшін

$$| K_n(t,s)| \le \frac{M^n * (t-s)^n}{(n-1)!}.$$

Содан кейін (2.22) теңдеудің шешімі келесідей болады

$$y(t) = f(t) + \int_0^t R(t,\tau)f(\tau)d\tau \ . \tag{2.24}$$

(2.24) y (τ) орнына x (τ) қоямыз.
Демек, A матрицасы уақытқа тәуелсіз болғандықтан

$$x(t) = \left(E + At + \frac{1}{2}A^2t^2 \ldots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots\right) * f(t) \tag{2.25}$$

Осыдан теореманың дәлелденгені шығады.

Жеткілікті үлкен k үшін $\frac{1}{k!}\left\|A^k t^k\right\|$ мәні кіші болады және (2.25) келесі түрде қайта жазылуға болады

$$x(t) = \left(E + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!}A^k t^k \right) * f(t), t \in [0,T]. \tag{2.26}$$

3-теорема. Кез келген $\varepsilon \ge 0$ үшін барлық $k > r$ болатындай r саны бар болғандықтан $\frac{1}{k!}\left\|A^k T^k\right\| \le \varepsilon$.

Дәлелдеу. $\gamma = \|A\|\,T, \gamma_k = \frac{1}{k!}\gamma^k$ мәндерді енгіземіз.

$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!}$ қатарын талқылаймыз. $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\gamma}{k+1}$ =0 есептейміз. $\rho \le 1$ болғандықтан, құрастырылған қатар жинақты болады. Кез-келген $\varepsilon \ge 0$ үшін барлық $k > r$ болатындай r саны бар болғандықтан $\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \le \rho + \varepsilon$ орындалады [73]. Бұдан $\frac{\gamma}{r+1} \le \varepsilon$ немесе $r = \left[\frac{\gamma}{\varepsilon}\right]$. (Бөлуден алынған бүтін бөлігі). Бұл теореманың дәлелденгенін білдіреді.

Соңғы жылдары есептеу математикасының санмен емес, интервалмен жұмыс жасайтын саласы дамыды (бұл бастапқы деректерді орнатудағы қателіктерді ескеруге мүмкіндік береді) [74].

Әрі қарай, интервалды математиканың нәтижелерін зерттелетін басқару мәселесіне қолданамыз.

Содан кейін басқарылатын тапсырма келесі мәселені зерттеуге дейін азаяды: кем дегенде бір $u(t) \in U$ басқару бар ма, онда интегралдық теңдеудің шешімі (2.22) T уақыт кезінде (2.20) шарттын қанағаттандырады.

Біз $\boldsymbol{v} = (0,\ L)$арқылы – L-ден L-ге дейінгі аралықты, $\boldsymbol{x_0} = (x_0, 0)$ нүктесіндегі центрі x_0 және нөлдік радиуспен аралықты белгілейміз; $U = \{u(t)|-L \le u(t) \le L, t \in [0,T]\}$.

Интервалдық вектор-функциясын белгілейміз

$$\boldsymbol{f}(t) = x_0 + t * B\boldsymbol{v}, t \in [0,T]. \tag{2.27}$$

Мұндағы * белгі – интервальдық көбейтуді білдіреді.

4-теорема. (2.20) шарттың оң жағындағы x_{T} векторы $\boldsymbol{x}(T)$ интервал векторына жататын болса, зерттелетін жүйе басқарылатын болады.

Дәлелдеу. (2.26) интегралдық теңдеудің шешімдерін келесі түрде қайта жазамыз

$$x(t) = P(t)f(t), t \in [0,T], \tag{2.28}$$

мұндағы $P(t) = E + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} A^k t^k$, $t \in [0,T]$.

Мұнда r 4-теорема шарттарынан таңдалады.

(2.28) шешімін T уақытында келесі интервалдық интегралдық өрнек түрінде қайта жазамыз.

$$\boldsymbol{x}(T) = P(T) * \boldsymbol{f}(T). \tag{2.29}$$

U жиыны $\boldsymbol{v} = (0,\ L)$ интервал векторымен сәйкес келетіндіктен, $\{x(t)|x(t,u) = P(T) * f(t),\ u(t) \in U, t \in [0,T]\}$ жиын интервал векторымен (2.28) сәйкес келеді. Демек, егер x_{T} шекаралық векторы $\boldsymbol{x}(T)$ интервал векторына жататын болса, онда (2.17)-(2.20) жүйенің басқарылатындығы шығады. Бұл теореманың дәлелденгенін білдіреді.

5-теорема. (2.21) теңдеудің $u(t) \in C[0,T]$ үздіксіз функциясы үшін (2.18) шартын қанағаттандыратын жалғыз үзіліссіз шешімі бар. Бұл шешімді қарапайым итерация әдісімен табуға болады (дәйекті жуықтаулар).

Дәлелдеу. Интегралдық теңдеуге қарапайым итерация әдісі қолдану арқылы (2.17) $x_k(t)$, *k*=0, 1, 2 … функциясының тізбегінің (жуықтау) рекуррентті қатынысын аламыз

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t Ax_k(\tau)d\tau + \int_0^t Bu(\tau)d\tau\ , t \in [0,T], k=1, 2 \ldots \tag{2.30}$$

$$f(t) = x_0 + B\int_0^t u(\tau)d\tau\ , \varphi_0(t) = f(t);$$

$\varphi_{k+1}(t) = f(t) + A\int_0^t \varphi_k(\tau)d\tau$ – деп белгілейік.

Онда табылған шешімді мына түрде көруге болады

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \ , \qquad (2.31)$$

егер $f(t)$ [0, T] үзіліссіз болса, және $K(t, \tau)$ $0 \leq t, \tau \leq T$ үзіліссіз болса, ол жинақталады.

$M = \|A\|,\ N = \|x_0\| * T * L * \|B\|$ – деп белгілейік. Осы өрнек арқылы қалаған шешімге k-ші жуықтауды бағалауға болады.

$$|\varphi_k(t)| \leq NM^k T^k / k! \qquad (2.32)$$

Кезекті жуықтау әдісінің факториальдық жинақтылығы (2.32) шығады.
Жуық шешім ретінде

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{r} \varphi_k(t), t \in [0, T], \qquad (2.33)$$

Оның дәлдігі келесі өрнекпен бағаланады:

$$|x(t) - x_r(t)| = \left| \sum_{k=r+1}^{\infty} \varphi_k(t) \right| \leq \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{NM^k T^k}{k!} = N\{\exp(MT) - \sum_{k=0}^{r} \frac{M^k T^k}{k!} =\}$$

Бұл кез келген тұрақты басқару $u(t) \in U, t \in [0, T]$ үшін (2.31) қатарларының біркелкі және абсолютті жинақтылығын білдіреді. Теорема дәлелденді.
6-теорема. Егер (2.20) шарттың оң жағындағы x_{T} векторы $\boldsymbol{x_r}(T)$интервалдық векторында жатса, зерттелетін жүйе басқарылады.
Дәлелдеу. T уақытындағы (2.33) жуық шешімді келесі интервалдық интегралдық өрнек түрінде қайта жазамыз.

$$\boldsymbol{x}_r(T) = \sum_{k=0}^{r} \boldsymbol{\varphi_k}(T), \qquad (2.34)$$
$$\boldsymbol{\varphi_0}(T) = \boldsymbol{f}(T); \quad \boldsymbol{\varphi_{k+1}}(T) = \boldsymbol{f}(T) + A * \int_0^T \boldsymbol{\varphi_k}(\tau) d\tau.$$

Мұндағы * белгі – интервальдық көбейтуді білдіреді, $\boldsymbol{x}_r(T) - \ N\left\{\exp(MT) - \sum_{k=0}^{r} \frac{M^k T^k}{k!} =\right\} \leq \varepsilon$ (ε –қажетті дәлдік) шартынан T және r уақытындағы интервал шекарасының векторы таңдалады.

Демек, егер x_{T} шекаралық векторы $\boldsymbol{x}(T)$интервал векторында жататын болса, онда (2.17)-(2.20) жүйенің басқарылатындығы шығады. Бұл теореманың дәлелденгенін білдіреді.

C++ тілінде сандық модельдеу үшін ұсынылған критерийдің есептеулерін жүзеге асыратын және интервал есептеу кітапханасын қолданатын бағдарлама жасалды [75].

<u>Лемма</u> (Гроноулл-Белман) [76]. *x(t)* және $g(t) \geq 0$ скалярлы үзіліссіз функциялары

$$x(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t g(s)x(s)ds, \ t \geq 0, \quad (2.35)$$

қанағаттандырсын. Мұндағы α(t) – кез-келген кемімейтін функция. Онда

$$x(t) \leq \alpha(t) exp\left(\int_0^t g(s)ds\right). \quad (2.36)$$

(2.17) және (2.20) есептерге Гронулла-Белман леммасын қолдана отырып келесі теңсіздікті аламыз:

$$\|x(T)\| \leq (\|x(0)\| + \int_0^T \|B(\tau)\| u(\tau)d\tau)\exp(\int_0^T \|A(\tau)\| d\tau). \quad (2.37)$$

$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ норма вектор ретінде және $\|A\| = \max\limits_{1\leq j\leq n}(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$ норма матрица ретінде аламыз.

2.2.3 Сызықты жүйелердің басқарылуын зерттеу үшін критерийді қолдану

Мысал 1. Мысал ретінде екінші ретті жүйе қарастырылады

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u, \quad (2.38)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - u,$$

ішінара жағдайларда

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$
$$T = 1.$$
$$-L \leq u(t) \leq L, \quad t \in [0,1] \text{ болсын} \quad (2.40)$$

Басқару мен соңғы нүктеде шарт өзгеріп тұрады.

Қарастырылып отырған мысал үшін А матрицасы мен В векторы мына түрде

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$
$$\|A\| = 3.0$$

Сандық шешім үшін С++ тілінде бағдарламасы әзірленді, оның нәтижелері төменде көрсетілген.

k =12 үшін норма матрицасы

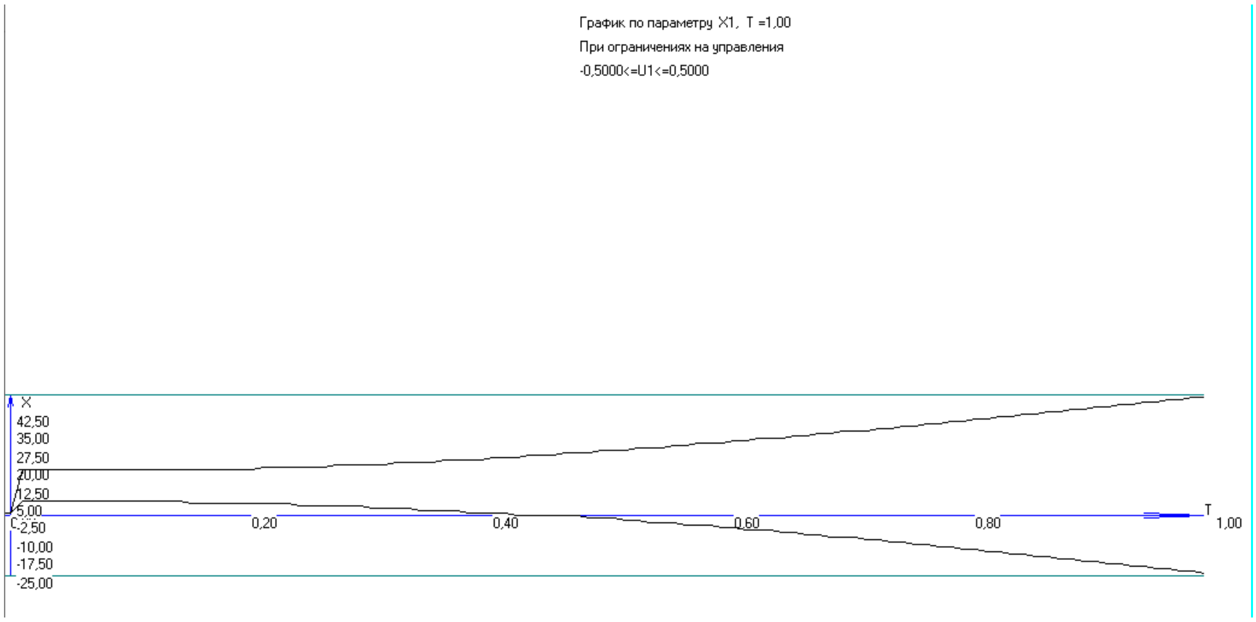
$$\|A^k\| = 0{,}005381$$

$t \in [0,1]$ уақытта басқаруға шектеуіміз L=0,5 болғанда $\boldsymbol{x}_r(t)$ интервал векторының мәнін есептейміз:

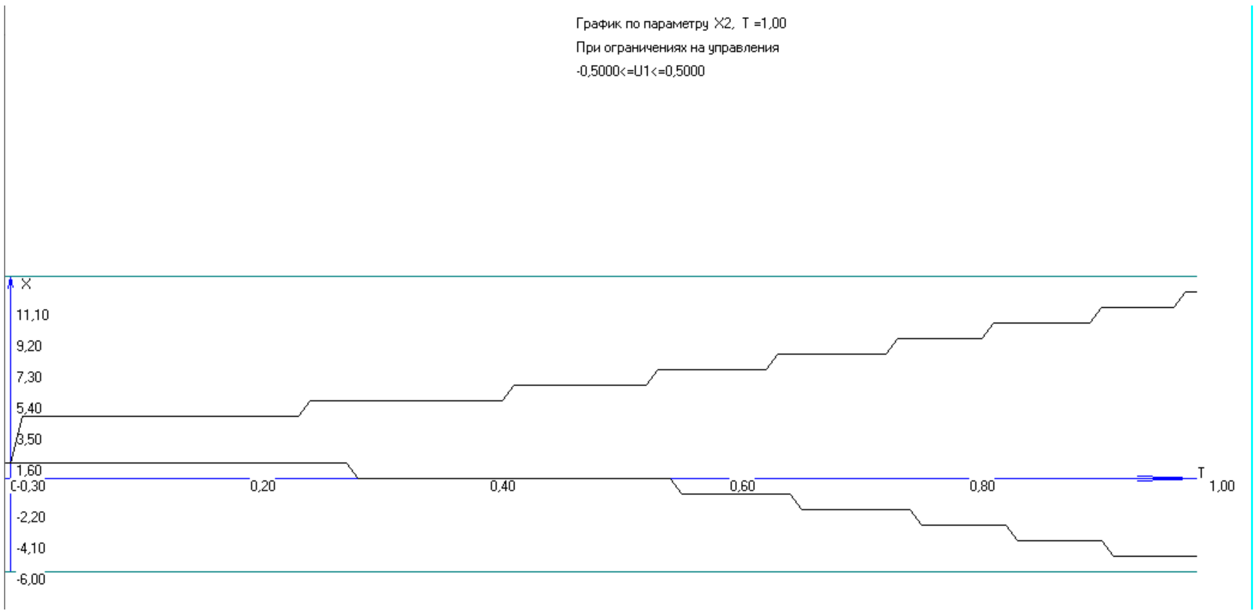
T =0,0100   [6,3781 19,1355] = (12,7568, 6,3787); [1,5508 4,6526] = (3,1017, 1,5509);
T =0,0200   [6,3768 19,1367] = (12,7568, 6,3800); [1,5504 4,6530] = (3,1017, 1,5513);
T =0,0300   [6,3739 19,1396] = (12,7568, 6,3829); [1,5497 4,6537] = (3,1017, 1,5520);
T =0,0400   [6,3688 19,1447] = (12,7568, 6,3880); [1,5484 4,6550] = (3,1017, 1,5533);
T =0,0500   [6,3608 19,1527] = (12,7568, 6,3959); [1,5464 4,6570] = (3,1017, 1,5553);
T =0,0600   [6,3494 19,1642] = (12,7568, 6,4074); [1,5435 4,6599] = (3,1017, 1,5582);
T =0,0700   [6,3338 19,1797] = (12,7568, 6,4230); [1,5396 4,6638] = (3,1017, 1,5621);
T =0,0800   [6,3135 19,2000] = (12,7568, 6,4432); [1,5346 4,6688] = (3,1017, 1,5671);
T =0,0900   [6,2880 19,2256] = (12,7568, 6,4688); [1,5283 4,6751] = (3,1017, 1,5734);
T =0,1000   [6,2566 19,2570] = (12,7568, 6,5002); [1,5205 4,6829] = (3,1017, 1,5812);
T =0,1100   [6,2188 19,2948] = (12,7568, 6,5380); [1,5111 4,6923] = (3,1017, 1,5906);
T =0,1200   [6,1741 19,3395] = (12,7568, 6,5827); [1,5001 4,7033] = (3,1017, 1,6016);
T =0,1300   [6,1220 19,3915] = (12,7568, 6,6348); [1,4873 4,7161] = (3,1017, 1,6144);
T =0,1400   [6,0621 19,4514] = (12,7568, 6,6946); [1,4725 4,7309] = (3,1017, 1,6292);
T =0,1500   [5,9941 19,5195] = (12,7568, 6,7627); [1,4558 4,7476] = (3,1017, 1,6459);
T =0,1600   [5,9174 19,5961] = (12,7568, 6,8393); [1,4370 4,7664] = (3,1017, 1,6647);
T =0,1700   [5,8320 19,6816] = (12,7568, 6,9248); [1,4160 4,7874] = (3,1017, 1,6857);
T =0,1800   [5,7374 19,7762] = (12,7568, 7,0194); [1,3928 4,8107] = (3,1017, 1,7089);
T =0,1900   [5,6334 19,8801] = (12,7568, 7,1233); [1,3673 4,8361] = (3,1017, 1,7344);
T =0,2000   [5,5201 19,9935] = (12,7568, 7,2367); [1,3395 4,8639] = (3,1017, 1,7622);
T =0,2100   [5,3971 20,1165] = (12,7568, 7,3597); [1,3094 4,8941] = (3,1017, 1,7923);
T =0,2200   [5,2644 20,2491] = (12,7568, 7,4924); [1,2769 4,9265] = (3,1017, 1,8248);
T =0,2300   [5,1221 20,3915] = (12,7568, 7,6347); [1,2420 4,9614] = (3,1017, 1,8597);
T =0,2400   [4,9700 20,5435] = (12,7568, 7,7867); [1,2048 4,9986] = (3,1017, 1,8969);
T =0,2500   [4,8084 20,7052] = (12,7568, 7,9484); [1,1653 5,0381] = (3,1017, 1,9364);
T =0,2600   [4,6371 20,8764] = (12,7568, 8,1196); [1,1235 5,0800] = (3,1017, 1,9783);
T =0,2700   [4,4564 21,0571] = (12,7568, 8,3004); [1,0793 5,1241] = (3,1017, 2,0224);
T =0,2800   [4,2664 21,2472] = (12,7568, 8,4904); [1,0329 5,1705] = (3,1017, 2,0688);
T =0,2900   [4,0671 21,4464] = (12,7568, 8,6896); [0,9842 5,2192] = (3,1017, 2,1175);
T =0,3000   [3,8589 21,6547] = (12,7568, 8,8979); [0,9334 5,2701] = (3,1017, 2,1683);
T =0,3100   [3,6417 21,8718] = (12,7568, 9,1150); [0,8804 5,3231] = (3,1017, 2,2213);
T =0,3200   [3,4159 22,0976] = (12,7568, 9,3409); [0,8253 5,3782] = (3,1017, 2,2765);
T =0,3300   [3,1816 22,3319] = (12,7568, 9,5752); [0,7681 5,4353] = (3,1017, 2,3336);
T =0,3400   [2,9390 22,5745] = (12,7568, 9,8178); [0,7089 5,4945] = (3,1017, 2,3928);
T =0,3500   [2,6883 22,8252] = (12,7568, 10,0685); [0,6478 5,5557] = (3,1017, 2,4539);
T =0,3600   [2,4297 23,0838] = (12,7568, 10,3271); [0,5847 5,6187] = (3,1017, 2,5170);
T =0,3700   [2,1634 23,3501] = (12,7568, 10,5934); [0,5198 5,6836] = (3,1017, 2,5819);
T =0,3800   [1,8896 23,6240] = (12,7568, 10,8672); [0,4530 5,7504] = (3,1017, 2,6487);
T =0,3900   [1,6084 23,9051] = (12,7568, 11,1484); [0,3845 5,8189] = (3,1017, 2,7172);
T =0,4000   [1,3201 24,1934] = (12,7568, 11,4367); [0,3142 5,8892] = (3,1017, 2,7875);
T =0,4100   [1,0248 24,4887] = (12,7568, 11,7319); [0,2423 5,9612] = (3,1017, 2,8595);
T =0,4200   [0,7228 24,7908] = (12,7568, 12,0340); [0,1687 6,0348] = (3,1017, 2,9331);
T =0,4300   [0,4141 25,0994] = (12,7568, 12,3427); [0,0934 6,1100] = (3,1017, 3,0083);
T =0,4400   [0,0989 25,4146] = (12,7568, 12,6578); [0,0167 6,1867] = (3,1017, 3,0850);
T =0,4500   [-0,2225 25,7360] = (12,7568, 12,9793); [-0,0616 6,2650] = (3,1017, 3,1633);
T =0,4600   [-0,5501 26,0636] = (12,7568, 13,3068); [-0,1414 6,3448] = (3,1017, 3,2431);
T =0,4700   [-0,8837 26,3972] = (12,7568, 13,6404); [-0,2227 6,4261] = (3,1017, 3,3244);
T =0,4800   [-1,2231 26,7367] = (12,7568, 13,9799); [-0,3054 6,5088] = (3,1017, 3,4071);

T =0,4900   [-1,5683 27,0818] = (12,7568, 14,3251); [-0,3894 6,5928] = (3,1017, 3,4911);
T =0,5000   [-1,9191 27,4326] = (12,7568, 14,6759); [-0,4748 6,6783] = (3,1017, 3,5766);
T =0,5100   [-2,2754 27,7889] = (12,7568, 15,0322); [-0,5616 6,7650] = (3,1017, 3,6633);
T =0,5200   [-2,6370 28,1506] = (12,7568, 15,3938); [-0,6497 6,8531] = (3,1017, 3,7514);
T =0,5300   [-3,0039 28,5175] = (12,7568, 15,7607); [-0,7390 6,9424] = (3,1017, 3,8407);
T =0,5400   [-3,3760 28,8895] = (12,7568, 16,1328); [-0,8296 7,0330] = (3,1017, 3,9313);
T =0,5500   [-3,7531 29,2666] = (12,7568, 16,5099); [-0,9214 7,1248] = (3,1017, 4,0231);
T =0,5600   [-4,1351 29,6487] = (12,7568, 16,8919); [-1,0144 7,2178] = (3,1017, 4,1161);
T =0,5700   [-4,5221 30,0356] = (12,7568, 17,2788); [-1,1086 7,3120] = (3,1017, 4,2103);
T =0,5800   [-4,9137 30,4273] = (12,7568, 17,6705); [-1,2039 7,4073] = (3,1017, 4,3056);
T =0,5900   [-5,3101 30,8236] = (12,7568, 18,0669); [-1,3004 7,5038] = (3,1017, 4,4021);
T =0,6000   [-5,7111 31,2246] = (12,7568, 18,4678); [-1,3980 7,6014] = (3,1017, 4,4997);
T =0,6100   [-6,1166 31,6301] = (12,7568, 18,8733); [-1,4967 7,7001] = (3,1017, 4,5984);
T =0,6200   [-6,5265 32,0400] = (12,7568, 19,2833); [-1,5965 7,7999] = (3,1017, 4,6982);
T =0,6300   [-6,9408 32,4543] = (12,7568, 19,6976); [-1,6973 7,9008] = (3,1017, 4,7990);
T =0,6400   [-7,3594 32,8730] = (12,7568, 20,1162); [-1,7992 8,0026] = (3,1017, 4,9009);
T =0,6500   [-7,7823 33,2958] = (12,7568, 20,5391); [-1,9021 8,1056] = (3,1017, 5,0039);
T =0,6600   [-8,2094 33,7229] = (12,7568, 20,9661); [-2,0061 8,2095] = (3,1017, 5,1078);
T =0,6700   [-8,6406 34,1541] = (12,7568, 21,3973); [-2,1110 8,3144] = (3,1017, 5,2127);
T =0,6800   [-9,0758 34,5893] = (12,7568, 21,8326); [-2,2169 8,4204] = (3,1017, 5,3187);
T =0,6900   [-9,5150 35,0286] = (12,7568, 22,2718); [-2,3238 8,5273] = (3,1017, 5,4255);
T =0,7000   [-9,9583 35,4718] = (12,7568, 22,7150); [-2,4317 8,6351] = (3,1017, 5,5334);
T =0,7100   [-10,4054 35,9189] = (12,7568, 23,1621); [-2,5405 8,7439] = (3,1017, 5,6422);
T =0,7200   [-10,8563 36,3699] = (12,7568, 23,6131); [-2,6502 8,8537] = (3,1017, 5,7519);
T =0,7300   [-11,3111 36,8246] = (12,7568, 24,0679); [-2,7609 8,9643] = (3,1017, 5,8626);
T =0,7400   [-11,7696 37,2832] = (12,7568, 24,5264); [-2,8725 9,0759] = (3,1017, 5,9742);
T =0,7500   [-12,2319 37,7454] = (12,7568, 24,9887); [-2,9850 9,1884] = (3,1017, 6,0867);
T =0,7600   [-12,6978 38,2113] = (12,7568, 25,4546); [-3,0983 9,3018] = (3,1017, 6,2000);
T =0,7700   [-13,1674 38,6809] = (12,7568, 25,9241); [-3,2126 9,4160] = (3,1017, 6,3143);
T =0,7800   [-13,6405 39,1540] = (12,7568, 26,3973); [-3,3277 9,5311] = (3,1017, 6,4294);
T =0,7900   [-14,1172 39,6308] = (12,7568, 26,8740); [-3,4437 9,6471] = (3,1017, 6,5454);
T =0,8000   [-14,5974 40,1110] = (12,7568, 27,3542); [-3,5606 9,7640] = (3,1017, 6,6623);
T =0,8100   [-15,0812 40,5947] = (12,7568, 27,8379); [-3,6783 9,8817] = (3,1017, 6,7800);
T =0,8200   [-15,5683 41,0818] = (12,7568, 28,3251); [-3,7968 10,0002] = (3,1017, 6,8985);
T =0,8300   [-16,0589 41,5724] = (12,7568, 28,8156); [-3,9161 10,1196] = (3,1017, 7,0178);
T =0,8400   [-16,5528 42,0663] = (12,7568, 29,3096); [-4,0363 10,2397] = (3,1017, 7,1380);
T =0,8500   [-17,0501 42,5636] = (12,7568, 29,8069); [-4,1573 10,3607] = (3,1017, 7,2590);
T =0,8600   [-17,5507 43,0642] = (12,7568, 30,3075); [-4,2791 10,4825] = (3,1017, 7,3808);
T =0,8700   [-18,0546 43,5681] = (12,7568, 30,8114); [-4,4017 10,6051] = (3,1017, 7,5034);
T =0,8800   [-18,5618 44,0753] = (12,7568, 31,3185); [-4,5251 10,7285] = (3,1017, 7,6268);
T =0,8900   [-19,0722 44,5857] = (12,7568, 31,8289); [-4,6493 10,8527] = (3,1017, 7,7510);
T =0,9000   [-19,5858 45,0993] = (12,7568, 32,3425); [-4,7742 10,9776] = (3,1017, 7,8759);
T =0,9100   [-20,1025 45,6161] = (12,7568, 32,8593); [-4,9000 11,1034] = (3,1017, 8,0017);
T =0,9200   [-20,6225 46,1360] = (12,7568, 33,3792); [-5,0264 11,2299] = (3,1017, 8,1282);
T =0,9300   [-21,1455 46,6591] = (12,7568, 33,9023); [-5,1537 11,3571] = (3,1017, 8,2554);
T =0,9400   [-21,6717 47,1852] = (12,7568, 34,4285); [-5,2817 11,4851] = (3,1017, 8,3834);
T =0,9500   [-22,2009 47,7145] = (12,7568, 34,9577); [-5,4105 11,6139] = (3,1017, 8,5122);
T =0,9600   [-22,7332 48,2467] = (12,7568, 35,4900); [-5,5400 11,7434] = (3,1017, 8,6417);
T =0,9700   [-23,2685 48,7821] = (12,7568, 36,0253); [-5,6702 11,8736] = (3,1017, 8,7719);
T =0,9800   [-23,8069 49,3204] = (12,7568, 36,5637); [-5,8012 12,0046] = (3,1017, 8,9029);
T =0,9900   [-24,3482 49,8617] = (12,7568, 37,1050); [-5,9328 12,1363] = (3,1017, 9,0346);

Төменде жоғарыда келтірілген кестелік деректердің нәтижелерінің графикалық көрінісі көрсетілген (сурет 2 және 3).



Сурет 2 – Басқарудағы шектеуіміз L=0,5 болғанда, x_1 айнымалысы үшін басқарылатын аймақ



Сурет 3 – Басқарудағы шектеуіміз L=0,5 болғанда, x_2 айнымалысы үшін басқарылатын аймақ

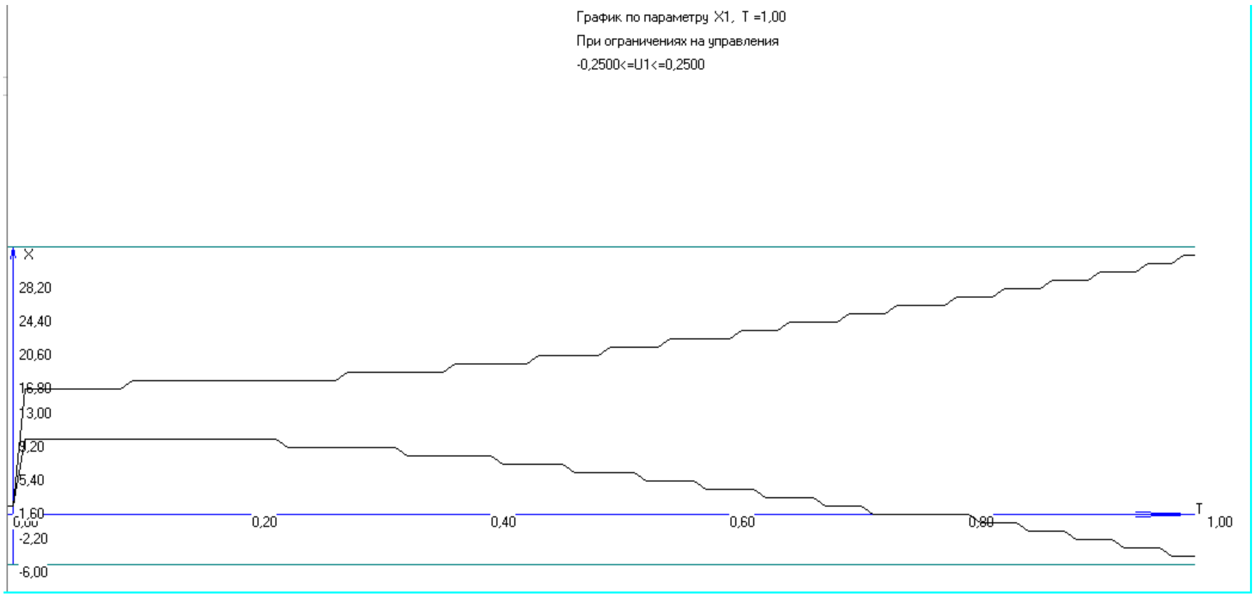
t∈[0,1] уақытта басқаруға шектеуіміз L=0,25 болғанда $x_r(t)$ интервал векторының мәнін есептейміз:

T =0,0100 [9,5674 15,9461] = (12,7568, 3,1894); [2,3262 3,8772] = (3,1017, 0,7755);
T =0,0200 [9,5668 15,9468] = (12,7568, 3,1900); [2,3261 3,8773] = (3,1017, 0,7756);
T =0,0300 [9,5653 15,9482] = (12,7568, 3,1914); [2,3257 3,8777] = (3,1017, 0,7760);

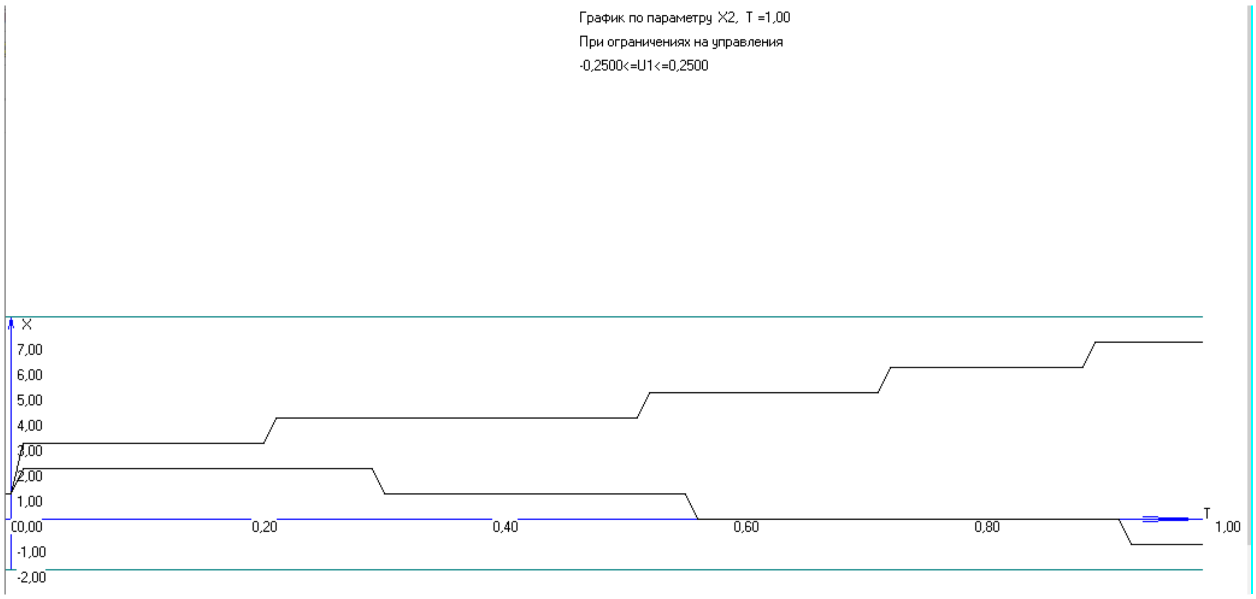
T =0,0400 [9,5628 15,9507] = (12,7568, 3,1940); [2,3251 3,8784] = (3,1017, 0,7767);
T =0,0500 [9,5588 15,9547] = (12,7568, 3,1980); [2,3241 3,8794] = (3,1017, 0,7777);
T =0,0600 [9,5531 15,9605] = (12,7568, 3,2037); [2,3226 3,8808] = (3,1017, 0,7791);
T =0,0700 [9,5453 15,9682] = (12,7568, 3,2115); [2,3207 3,8827] = (3,1017, 0,7810);
T =0,0800 [9,5351 15,9784] = (12,7568, 3,2216); [2,3182 3,8853] = (3,1017, 0,7836);
T =0,0900 [9,5224 15,9912] = (12,7568, 3,2344); [2,3150 3,8884] = (3,1017, 0,7867);
T =0,1000 [9,5067 16,0069] = (12,7568, 3,2501); [2,3111 3,8923] = (3,1017, 0,7906);
T =0,1100 [9,4878 16,0258] = (12,7568, 3,2690); [2,3064 3,8970] = (3,1017, 0,7953);
T =0,1200 [9,4654 16,0481] = (12,7568, 3,2913); [2,3009 3,9025] = (3,1017, 0,8008);
T =0,1300 [9,4394 16,0741] = (12,7568, 3,3174); [2,2945 3,9089] = (3,1017, 0,8072);
T =0,1400 [9,4094 16,1041] = (12,7568, 3,3473); [2,2871 3,9163] = (3,1017, 0,8146);
T =0,1500 [9,3754 16,1381] = (12,7568, 3,3814); [2,2788 3,9247] = (3,1017, 0,8230);
T =0,1600 [9,3371 16,1764] = (12,7568, 3,4197); [2,2693 3,9341] = (3,1017, 0,8324);
T =0,1700 [9,2944 16,2192] = (12,7568, 3,4624); [2,2588 3,9446] = (3,1017, 0,8429);
T =0,1800 [9,2471 16,2665] = (12,7568, 3,5097); [2,2472 3,9562] = (3,1017, 0,8545);
T =0,1900 [9,1951 16,3184] = (12,7568, 3,5617); [2,2345 3,9689] = (3,1017, 0,8672);
T =0,2000 [9,1384 16,3751] = (12,7568, 3,6184); [2,2206 3,9828] = (3,1017, 0,8811);
T =0,2100 [9,0769 16,4366] = (12,7568, 3,6798); [2,2055 3,9979] = (3,1017, 0,8962);
T =0,2200 [9,0106 16,5029] = (12,7568, 3,7462); [2,1893 4,0141] = (3,1017, 0,9124);
T =0,2300 [8,9394 16,5741] = (12,7568, 3,8173); [2,1719 4,0315] = (3,1017, 0,9298);
T =0,2400 [8,8634 16,6501] = (12,7568, 3,8934); [2,1533 4,0501] = (3,1017, 0,9484);
T =0,2500 [8,7826 16,7310] = (12,7568, 3,9742); [2,1335 4,0699] = (3,1017, 0,9682);
T =0,2600 [8,6969 16,8166] = (12,7568, 4,0598); [2,1126 4,0908] = (3,1017, 0,9891);
T =0,2700 [8,6066 16,9069] = (12,7568, 4,1502); [2,0905 4,1129] = (3,1017, 1,0112);
T =0,2800 [8,5116 17,0020] = (12,7568, 4,2452); [2,0673 4,1361] = (3,1017, 1,0344);
T =0,2900 [8,4119 17,1016] = (12,7568, 4,3448); [2,0430 4,1605] = (3,1017, 1,0587);
T =0,3000 [8,3078 17,2057] = (12,7568, 4,4490); [2,0175 4,1859] = (3,1017, 1,0842);
T =0,3100 [8,1992 17,3143] = (12,7568, 4,5575); [1,9910 4,2124] = (3,1017, 1,1107);
T =0,3200 [8,0863 17,4272] = (12,7568, 4,6704); [1,9635 4,2399] = (3,1017, 1,1382);
T =0,3300 [7,9692 17,5443] = (12,7568, 4,7876); [1,9349 4,2685] = (3,1017, 1,1668);
T =0,3400 [7,8479 17,6656] = (12,7568, 4,9089); [1,9053 4,2981] = (3,1017, 1,1964);
T =0,3500 [7,7225 17,7910] = (12,7568, 5,0342); [1,8747 4,3287] = (3,1017, 1,2270);
T =0,3600 [7,5932 17,9203] = (12,7568, 5,1635); [1,8432 4,3602] = (3,1017, 1,2585);
T =0,3700 [7,4601 18,0535] = (12,7568, 5,2967); [1,8107 4,3927] = (3,1017, 1,2910);
T =0,3800 [7,3232 18,1904] = (12,7568, 5,4336); [1,7774 4,4261] = (3,1017, 1,3243);
T =0,3900 [7,1826 18,3309] = (12,7568, 5,5742); [1,7431 4,4603] = (3,1017, 1,3586);
T =0,4000 [7,0384 18,4751] = (12,7568, 5,7183); [1,7080 4,4955] = (3,1017, 1,3937);
T =0,4100 [6,8908 18,6227] = (12,7568, 5,8660); [1,6720 4,5314] = (3,1017, 1,4297);
T =0,4200 [6,7398 18,7738] = (12,7568, 6,0170); [1,6352 4,5682] = (3,1017, 1,4665);
T =0,4300 [6,5854 18,9281] = (12,7568, 6,1713); [1,5976 4,6058] = (3,1017, 1,5041);
T =0,4400 [6,4279 19,0857] = (12,7568, 6,3289); [1,5592 4,6442] = (3,1017, 1,5425);
T =0,4500 [6,2671 19,2464] = (12,7568, 6,4896); [1,5200 4,6834] = (3,1017, 1,5817);
T =0,4600 [6,1033 19,4102] = (12,7568, 6,6534); [1,4801 4,7233] = (3,1017, 1,6216);
T =0,4700 [5,9365 19,5770] = (12,7568, 6,8202); [1,4395 4,7639] = (3,1017, 1,6622);
T =0,4800 [5,7668 19,7467] = (12,7568, 6,9899); [1,3982 4,8052] = (3,1017, 1,7035);
T =0,4900 [5,5942 19,9193] = (12,7568, 7,1625); [1,3561 4,8473] = (3,1017, 1,7456);
T =0,5000 [5,4188 20,0947] = (12,7568, 7,3379); [1,3134 4,8900] = (3,1017, 1,7883);
T =0,5100 [5,2407 20,2728] = (12,7568, 7,5161); [1,2701 4,9334] = (3,1017, 1,8317);
T =0,5200 [5,0599 20,4537] = (12,7568, 7,6969); [1,2260 4,9774] = (3,1017, 1,8757);
T =0,5300 [4,8764 20,6371] = (12,7568, 7,8804); [1,1814 5,0221] = (3,1017, 1,9204);
T =0,5400 [4,6904 20,8231] = (12,7568, 8,0664); [1,1361 5,0674] = (3,1017, 1,9656);
T =0,5500 [4,5018 21,0117] = (12,7568, 8,2549); [1,0902 5,1133] = (3,1017, 2,0115);

T =0,5600 [4,3108 21,2027] = (12,7568, 8,4460); [1,0437 5,1598] = (3,1017, 2,0581);
T =0,5700 [4,1174 21,3962] = (12,7568, 8,6394); [0,9966 5,2069] = (3,1017, 2,1051);
T =0,5800 [3,9215 21,5920] = (12,7568, 8,8352); [0,9489 5,2545] = (3,1017, 2,1528);
T =0,5900 [3,7233 21,7902] = (12,7568, 9,0334); [0,9006 5,3028] = (3,1017, 2,2011);
T =0,6000 [3,5229 21,9907] = (12,7568, 9,2339); [0,8518 5,3516] = (3,1017, 2,2499);
T =0,6100 [3,3201 22,1934] = (12,7568, 9,4367); [0,8025 5,4009] = (3,1017, 2,2992);
T =0,6200 [3,1151 22,3984] = (12,7568, 9,6416); [0,7526 5,4508] = (3,1017, 2,3491);
T =0,6300 [2,9080 22,6055] = (12,7568, 9,8488); [0,7022 5,5012] = (3,1017, 2,3995);
T =0,6400 [2,6987 22,8149] = (12,7568, 10,0581); [0,6512 5,5522] = (3,1017, 2,4505);
T =0,6500 [2,4872 23,0263] = (12,7568, 10,2695); [0,5998 5,6036] = (3,1017, 2,5019);
T =0,6600 [2,2737 23,2398] = (12,7568, 10,4831); [0,5478 5,6556] = (3,1017, 2,5539);
T =0,6700 [2,0581 23,4554] = (12,7568, 10,6987); [0,4953 5,7081] = (3,1017, 2,6064);
T =0,6800 [1,8405 23,6730] = (12,7568, 10,9163); [0,4424 5,7610] = (3,1017, 2,6593);
T =0,6900 [1,6209 23,8927] = (12,7568, 11,1359); [0,3889 5,8145] = (3,1017, 2,7128);
T =0,7000 [1,3993 24,1143] = (12,7568, 11,3575); [0,3350 5,8684] = (3,1017, 2,7667);
T =0,7100 [1,1757 24,3378] = (12,7568, 11,5811); [0,2806 5,9228] = (3,1017, 2,8211);
T =0,7200 [0,9502 24,5633] = (12,7568, 11,8065); [0,2257 5,9777] = (3,1017, 2,8760);
T =0,7300 [0,7228 24,7907] = (12,7568, 12,0339); [0,1704 6,0330] = (3,1017, 2,9313);
T =0,7400 [0,4936 25,0200] = (12,7568, 12,2632); [0,1146 6,0888] = (3,1017, 2,9871);
T =0,7500 [0,2624 25,2511] = (12,7568, 12,4943); [0,0584 6,1450] = (3,1017, 3,0433);
T =0,7600 [0,0295 25,4841] = (12,7568, 12,7273); [0,0017 6,2017] = (3,1017, 3,1000);
T =0,7700 [-0,2053 25,7188] = (12,7568, 12,9621); [-0,0554 6,2589] = (3,1017, 3,1572);
T =0,7800 [-0,4419 25,9554] = (12,7568, 13,1986); [-0,1130 6,3164] = (3,1017, 3,2147);
T =0,7900 [-0,6802 26,1938] = (12,7568, 13,4370); [-0,1710 6,3744] = (3,1017, 3,2727);
T =0,8000 [-0,9203 26,4339] = (12,7568, 13,6771); [-0,2294 6,4328] = (3,1017, 3,3311);
T =0,8100 [-1,1622 26,6757] = (12,7568, 13,9190); [-0,2883 6,4917] = (3,1017, 3,3900);
T =0,8200 [-1,4058 26,9193] = (12,7568, 14,1625); [-0,3475 6,5510] = (3,1017, 3,4492);
T =0,8300 [-1,6511 27,1646] = (12,7568, 14,4078); [-0,4072 6,6106] = (3,1017, 3,5089);
T =0,8400 [-1,8980 27,4115] = (12,7568, 14,6548); [-0,4673 6,6707] = (3,1017, 3,5690);
T =0,8500 [-2,1467 27,6602] = (12,7568, 14,9034); [-0,5278 6,7312] = (3,1017, 3,6295);
T =0,8600 [-2,3970 27,9105] = (12,7568, 15,1537); [-0,5887 6,7921] = (3,1017, 3,6904);
T =0,8700 [-2,6489 28,1625] = (12,7568, 15,4057); [-0,6500 6,8534] = (3,1017, 3,7517);
T =0,8800 [-2,9025 28,4160] = (12,7568, 15,6593); [-0,7117 6,9151] = (3,1017, 3,8134);
T =0,8900 [-3,1577 28,6712] = (12,7568, 15,9145); [-0,7738 6,9772] = (3,1017, 3,8755);
T =0,9000 [-3,4145 28,9280] = (12,7568, 16,1713); [-0,8363 7,0397] = (3,1017, 3,9380);
T =0,9100 [-3,6729 29,1864] = (12,7568, 16,4297); [-0,8991 7,1025] = (3,1017, 4,0008);
T =0,9200 [-3,9329 29,4464] = (12,7568, 16,6896); [-0,9624 7,1658] = (3,1017, 4,0641);
T =0,9300 [-4,1944 29,7079] = (12,7568, 16,9511); [-1,0260 7,2294] = (3,1017, 4,1277);
T =0,9400 [-4,4575 29,9710] = (12,7568, 17,2142); [-1,0900 7,2934] = (3,1017, 4,1917);
T =0,9500 [-4,7221 30,2356] = (12,7568, 17,4788); [-1,1544 7,3578] = (3,1017, 4,2561);
T =0,9600 [-4,9882 30,5018] = (12,7568, 17,7450); [-1,2191 7,4225] = (3,1017, 4,3208);
T =0,9700 [-5,2559 30,7694] = (12,7568, 18,0127); [-1,2842 7,4877] = (3,1017, 4,3859);
T =0,9800 [-5,5251 31,0386] = (12,7568, 18,2818); [-1,3497 7,5531] = (3,1017, 4,4514);
T =0,9900 [-5,7957 31,3093] = (12,7568, 18,5525); [-1,4156 7,6190] = (3,1017, 4,5173);

Төменде жоғарыда келтірілген кестелік деректердің нәтижелерінің графикалық көрінісі көрсетілген (сурет 4 және 5).



Сурет 4 – Басқарудағы шектеуіміз L=0,25 болғанда, x_1 айнымалысы үшін басқарылатын аймақ



Сурет 5 – Басқарудағы шектеуіміз L=0,25 болғанда, x_2 айнымалысы үшін басқарылатын аймақ

а) Соңғы нүктемізді $x_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ деп алайық

2 және 3-суреттерден және сандық есептеулерден L=0,5 шектеуімен жүйе 0,45-ке дейінгі уақытта басқарылмайтындығын және 0,45-тен кейінгі уақытта басқарылатындығын көруге болады.

4 және 5-суреттерден және сандық есептеулерден L=0,25 шектеуімен жүйе 0,77-ке дейінгі уақытта басқарылмайтындығын және 0,77-тен кейінгі уақытта басқарылатындығын көруге болады.

ә) Басқарылмайтын жағдайды қарастырайық. Ол үшін Гронуолл-Белман леммасы бойынша $\|x(T)\| \leq 4\exp(4) \approx 218{,}3$ шешімін аламыз

Демек, $x_T = \begin{pmatrix} 109 \\ 110 \end{pmatrix}$ үшін Гронуолл-Белман леммасы бойынша (2.38)-(2.40) жүйеміз басқарылмайды, яғни, $-L \le u(t) \le L$ шектеуін қанағаттандыратын және T = 1 уақытында $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ нүктесінен $x_T = \begin{pmatrix} 109 \\ 110 \end{pmatrix}$ нүктесіне ауысатын жүйемізде басқару жоқ.

Ұсынылған критерийді қолданып, 2-5-суреттерден және сандық есептеулерден $x_T = \begin{pmatrix} 109 \\ 110 \end{pmatrix}$ векторы екі айнымалыда да басқарылатын аймаққа жатпайтынын көруге болады.

б) x_T нүктесі ретінде (2.40) шектеуді қанағаттандыратын u≡0 басқару кезінде Т уақыт мезетіндегі Коши (2.38)-(2.39) есебінің шешімін алайық x_T=$\begin{pmatrix} 41{,}13 \\ 9{,}43 \end{pmatrix}$.

Ұсынылған критерийді қолдана отырып, сонымен қатар 2 және 3-суреттерден және сандық есептеулерден *L*=0,5 шектеуінде жүйе басқарылатындығын көруге болады, өйткені *T*=1 уақытында -24,3482< 41,13< 49,8617 және -5,9328<9,43<12,1363 шарттары орындалады.

Сонымен қатар *L*=0,5 шектеуімен жүйе екі айнымалыда да басқарылмайды.

Жоғарыда келтірілген мысалдан басқарудағы шектеуді өсіргенде басқарылу аймағының кеңейетіндігін көруге болады.

Мысал 2. Автоматты манипулятордың электромеханикалық бақылау жүйесінің тізбектерінің күйін сипаттайтын үшінші ретті типтегі теңдеулер жүйесі қарастырылады (2.17) [77], мұндағы $x = x(t) = \begin{pmatrix} i_я(t) \\ \Omega(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} -$ жүйенің күй векторы, $u = u(t) = \begin{pmatrix} \Omega_0(t) \\ \theta_0(t) \end{pmatrix} -$ жүйенің басқару кіріс вектор-сигналы,

$$l_i^1 \le u_i \le l_i^2, i = \overline{1,2}, t \in [0, T], \tag{2.41}$$

өрнекпен шектелген.

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{T_я} + \frac{k_{ос}k_{ум}R_ш}{L_я}\right) & -\left(\frac{k_e}{L_я} + \frac{k_1 k_{ум} k_m}{L_я}\right) & -\frac{k_1 k_{ум} k_n}{L_я} \\ \frac{k_м}{J} & -\frac{1}{T_м} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 k_{ум} k_г}{L_я} & \frac{k_1 k_{ум} k_г}{L_я} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A және *B* матрицаларының коэффициенттерінің сандық мәндері бақылау жүйесінің параметрлері мен құрылымына байланысты.

$$x_0 = (1{,}1{,}1), \qquad (2.42)$$
$$T = 1,$$
$$T_я = 2, L_я = 3, к_{ос} = 1, к_{ум} = 1.5, R_ш = 1.1, к_е = 2.1,$$
$$к_1 = 0.1, к_m = 2, к_n = 4, к_г = 6, J = 5, T_м = 4.$$

Сонда теңдеулер жүйесі (2.17)

$$\dot{i}_я = -1.05 i_я - 0.8\Omega - 3.0\theta - 3.0\Omega_0 + 2.0\theta_0,$$
$$\dot{\Omega} = 0.4 i_я - 0.25\Omega,$$
$$\dot{\theta} = \Omega + \theta.$$

түрінде беріледі.
$u = (\Omega_0(t), \theta_0(t))^*$ векторына

$$-0.6 \le \Omega_0 \le 0.6, t \in [0{,}1] \qquad (2.43)$$
$$-1.25 \le \theta_0 \le 1.25, t \in [0{,}1]$$

түріндегі шектік аралықтарды береміз.

$$\boldsymbol{x_r} = \begin{pmatrix} (4.94\ 12.29) \\ (0.14\ 1.62) \\ (4.33\ 5.87) \end{pmatrix}$$

Мысал параметрлерінің мәндерін (2.37) қою арқылы

$$\|x(1)\| \le (3 + 3 * 1.85)\exp(4) \approx 466.6$$

мәнін аламыз.

Демек, $x_T = (109{,}110)^*$ болса, жүйе басқарылмайды яғни, жүйені T = 1 уақытта $(1{,}1{,}1)^*$ нүктесінен $x(1) = \begin{pmatrix} 160 \\ 160 \\ 150 \end{pmatrix}$ нүктесіне ауыстыратын басқару жоқ.

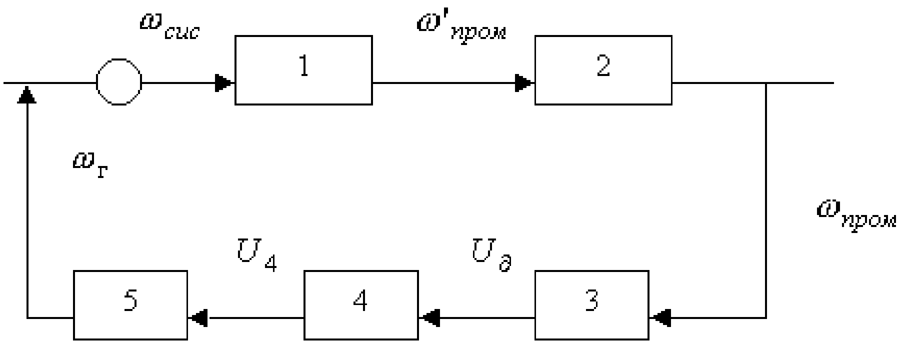
Ұсынылған критерийді қолдана отырып, $x(1) = \begin{pmatrix} 160 \\ 160 \\ 150 \end{pmatrix}$ векторы $\boldsymbol{x_r}$ интервалдық векторында жатпайды, өйткені 160>4.94+12.29, 160>0.14+1.62 және 150>4.33+5.87, яғни үш айнымалы бойынша басқару жоқ.

$x(1)$ нүктесі ретінде (2.17) шектеуді қанағаттандыратын T уақыт кезінде және $u \equiv 0$ басқару кезіндегі (2.43) Коши есебінің шешімін аламыз, сонда $x(1) = \begin{pmatrix} -4{,}87 \\ 0{,}12 \\ 4{,}1 \end{pmatrix}$ болады.

Ұсынылған критерийді қолдана отырып, $x(1)$ векторы $\boldsymbol{x_r}$ интервалдық векторына жатады, өйткені 4,94−12,29<−4,87<4,94+12,29, 0,14−1,62<0,12<0,14+1,62 және 4,33−5,87<4,1<4,33+5,87, яғни жүйе басқарылады.

Мысал 3. Гетеродинді қабылдағыштың жиілігін автоматты түрде реттеу жүйесі қарастырылады

Гетеродинді қабылдағыштарда [78] сапалы дыбысты қамтамасыз ету үшін композицияға жиілікті автоматты реттеу жүйесі (АРЖ) енгізіледі (6-сурет).



Сурет - 6 Гетеродинді қабылдағыштың жиілігін автоматты реттеу жүйесі

Әр 1-5 құрылғының жұмысы δω жиіліктің ауытқуы үшін жазылған келесі қатынастармен сипатталады:

1) араластырғыш: $\delta\omega_{\text{сигн}} - \delta\omega_{\text{г}} = \delta\omega'_{\text{пром}}$
2) аралық жиілікті күшейткіш (АЖК):
$$T_1\frac{d}{dt}\left(\delta\omega_{\text{пром}}\right) + \delta\omega_{\text{пром}} = \delta\omega'_{\text{пром}}$$
3) дискриминатор: $U_{\partial} = K_{\partial}\delta\omega_{\text{пром}}$
4) күшейткіш: $T_2\frac{dU_y}{dt} + U_y = U_{\partial}$
5) гетеродиннің басқарушы элементі:
$$T_3\frac{d}{dt}(\delta\omega_{\text{г}}) + \delta\omega_{\text{г}} = K_{\text{г}}U_y$$

$T_1 = 0.3;\ T_2 = 0.2,\ T_3 = 0.1$ дәл мәндерінде, бақылау критерийін қолдана отырып, біз $\boldsymbol{K_{\partial}} = [10.6, 10.96] = (10.78, 0.107)$ күшеюдің интервалды коэффициентінде басқару қамтамасыз етілетінін аңғаруға болады.

Сандық есептеулердің нәтижелері ұсынылған бақылау критерийінің тиімділігін және оларды практикалық қосымшаларда қолдану мүмкін екенін көрсетеді.

2.2.4 Басқарудың интервал критериін В.И.Зубов критериімен салыстыру

Зубов критерийі [16]. Басқарылатын сызықты жүйе қарастырылады:

$$x = P(t) * x + Q(t) * u, \tag{2.44}$$

басқаруға төмендегідей шектеулер беріледі:

$$l_1 \leq u \leq l_2. \tag{2.45}$$

(2.45) шектеуді қанағаттандыратын және (2.44) жүйені тіркелген T уақыт аралығында $x(0) = x_0$ бастапқы күйден $x(T) = x_T$ соңғы күйіне ауыстыра алатын басқару бар ма жоқ па тексеру есебі қойылады.

Қозғалыстарды локализациялаудың осы мәселесін шешейік. Ең алдымен, басқару (2.45) түрінде ұсынылуы мүмкін

$$u = B * c + V, \tag{2.46}$$

мұндағы, $B = Y^{-1}Q$ және c – тұрақты вектор. Берілген вектордың мәнін есеп шарты бойынша тек бір ғана жолмен алуға болады. Атап айтқанда: (2.44) жүйені сол жақта Y^{-1} матрицасына көбейту және [0, T] ішінде интегралдау арқылы, табамыз

$$-x_0 = A(0,\ T)c$$

осы жерден келесідей теңдеу шығады

$$c = -A^{-1}(0,\ T)x_0, \tag{2.47}$$

мұндағы, $A(0,\ T) = \int_0^T BB^* dt$.

Бұл есептеулерде B матрицасының жолдарына V векторлық функциясының ортогоналдылық шарты қолданылды, яғни

$$\int_0^T BVdt = 0.$$

(2.47) теңдікті (2.45) шартқа қоя отырып, келесідей теңсіздікті аламыз

$$l_1 \leq B * c + V \leq l_2. \tag{2.48}$$

Егер (2.44) жүйені сол жағынан Y^{-1} көбейткеннен кейін, t-дан T дейін интегралдайтын болсақ, келесідей қатынасты аламыз

$$-Y^{-1}(t)x(t) - A(t,\ T)c = \int_0^T BVdt. \tag{2.49}$$

V векторлық функциясын $[t,\ T]$ аралығына төмендегі форма бойынша қоямыз

$$V(\tau) = B(\tau)\gamma(t) + W(\tau), \tag{2.50}$$

мұндағы W функциясы шынайылық шартын қанағаттандырады.

$$\int_t^T B(\tau)W(\tau)d\tau = 0.$$

Олай болса, (2.50) формулада көрсетілген $\gamma(t)$ векторы тек бір ғана жолмен анықталады:

$$\gamma(t) = A^{-1}(t,\ T)\int_t^T B(\tau)V(\tau)d\tau.$$

(2.50) мәнді (2.48) теңсіздікке қойып, табамыз

$$l_1 \le B * c + B(\tau)\gamma(t) + W(\tau) \le l_2,$$

мұндағы $\tau \in [t,\ T]$ немесе

$$l_1 \le B * c + B(\tau)A^{-1}(t,\ T)(-Y^{-1}(t)x(t) - A(t,\ T)\mathrm{c}) + W(\tau) \le l_2 \qquad (2.51)$$

Төмендегідей теңдеумен сипатталатын басқарылатын жүйенің мысалын қарастырайық

$$\dot{x} = x + u. \qquad (2.52)$$

басқаруға қойылатын шектеу

$$-1 \le u \le 1 \qquad (2.53)$$

(2.52)-(2.53) жүйелерді келесі мәндік параметрлер бойынша зерттейміз

$$x_0 = 0, x_T = 1,\ T = 1 \qquad (2.54)$$

(2.52)-(2.54) есептер үшін жоғарыда анықталған матрицаларды есептейміз (бұл мысал үшін – функциялар):

$$Y(t) = e^t.$$
$$B(t) = e^{-t}$$
$$A(t,T) = \int_t^T e^{-2\tau}\,d\tau = (e^{-2t} - e^{-2T})/2.$$
$$c = 0.$$

$W = 0$ ді (2.51) теңсіздікке қоятын болсақ,

$$l_2 \le 2e^{-\tau}(e^{-2t} - e^{-2T})^{-1}e^{-t}x(t) \le l_1$$
$$l_2 e^{t+\tau}(e^{-2t} - e^{-2T})/2 \le x(t) \le l_1 e^{t+\tau}(e^{-2t} - e^{-2T})/2$$
$$-(e^2 - 1)/(2e) \le x(t) \le (e^2 - 1)/(2e)$$

яғни

$$-1{,}175 \le x(t) \le 1{,}175 \qquad (2.55)$$

Осылайша, қол жетімділік аймағы Зубов критерийі арқылы (2.55) теңсіздікпен бағаланады.

Басқарудың интервалды критерийі.

(2.52) - (2.53) жүйелері үшін алынған басқарудың интервалды критерийі қолданылады. Нәтижесінде біз келесі бағаны аламыз

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x(t_0) + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau = e^t(u, d_u)\int_0^t e^{-\tau}\, d\tau =$$
$$= e^t(u, d_u)(1 - e^{-t}) = (e^t - 1)(u, d_u)$$

$$\begin{gathered} 1 - e \le x(t) \le e - 1 \\ -1{,}718 \le x(t) \le 1{,}718 \end{gathered} \tag{2.56}$$

Көріп отырғаныңыздай, басқарудың интервалды критерийі арқылы алынған аймақ Зубовтың басқару аймағына қарағанда кеңірек.

2.3 Сызықты емес жүйелерді басқару

2.3.1 Сызықты емес жүйелердің басқарылуын зерттеу үшін интервалды талдауды қолдану

Сызықтық емес қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталған басқару жүйесі қарастырылады

$$\dot{x} = f(x, u, t). \tag{2.57}$$

мұндағы $f(x, u, t)$ – n-вектор, оның элементтері аргументтері бойынша үздіксіз дифференциалданатын функциялар, x – n-жүйе күйінің өлшемді векторы, u − скалярлық басқару.

Басқаруға келесідей шектеулер беріледі

$$u(t) \in U = \{u(t): -L \le u(t) \le L, t \in [0, T]\}. \tag{2.58}$$

(2.58) шектеуді қанағаттандыратын және жүйені бастапқы күйден

$$x(0) = x_0. \tag{2.59}$$

$$x(T) = x_T. \tag{2.60}$$

$[0, T]$ тіркелген уақыт аралығында ауыстыратын басқарудың бар болу міндеті зерттеледі [79].

Коши (2.57)-(2.60) есептерінің теңдеулер жүйесінің оң жағына салынған қасиеттеріне байланысты $u(t) \in U$ бекітілген басқарумен $x(t), t \in [0, T]$ шешімінің болуы мен бірегейлігі теоремасының шарттары орындалды [77].

(2.57-2.60) Коши есебін интегралдық түрде қайта жазамыз

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau)d\tau + \int_0^t Bu(\tau)d\tau\,. \qquad (2.61)$$

(2.61) теңдеу екінші текті Вольтер-Урысон интегралдық теңдеуінің нақты жағдайы болып табылады [74]

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t, \tau, y(\tau))d\tau, \qquad (2.62)$$

мұндағы

$$y(t) = x(t); g(t) = x(0) + \int_0^t Bu(\tau)d\tau\,; K\big(t, \tau, y(\tau)\big) = f(y(\tau), \tau).$$

Интервалды-вектор функциясын белгілейміз

$$\boldsymbol{g}(t) = x_0 + t * B\boldsymbol{v},\, t \in [0, T]. \qquad (2.63)$$

Мұндағы * - интервалды көбейтуді білдіреді.

7- теорема. (2.51) теңдеуі (2.47) шартын қанағаттандыратын, $u(t) \in C[0, T]$ үздіксіз функциясы үшін бір ғана үздіксіз шешімі болсын. Бұл шешімді қарапайым итерация әдісімен шешуге болады (тізбекті жуықтау).

Дәлелдеу. Интегралдық теңдеуге қарапайым итерация әдісі қолдану арқылы $x_k(t)$, *k*=0, 1, 2 … функция тізбегінің (жуықтау) рекуррентті қатынысын аламыз

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(t, \tau, x_k(\tau))d\tau + \int_0^t Bu(\tau)d\tau \;\;, \qquad (2.64)$$

$t \in [0, T]$, *k* =1, 2 …

Белгілейміз

$$g(t) = x_0 + B\int_0^t u(\tau)d\tau\,, \varphi_0(t) = g(t);$$
$$\varphi_{k+1}(t) = g(t) + \int_0^t f(t, \tau, \varphi_k(\tau))d\tau.$$

Онда табылған шешімді мына түрде ұсынуға болады

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \quad , \qquad (2.65)$$

егер $f(t)$ [0, T] үзіліссіз болса және $K(t, \tau)$ $0 \le t, \tau \le T$ үзіліссіз болса, ол жинақталады.

$M = \sup_{0\le t,s\le T} |K(t,s)|$, $N = \|x_0\| * T * L * \|B\|$ –деп белгілейік. Осы өрнек арқылы қажетті шешімге k-ші жуықтауды бағалауға болады

$$|\varphi_k(t)| \le NM^kT^k/k! \tag{2.66}$$

Кезекті жуықтау әдісінің факториальдық жинақтылығы (2.66) шығады.

Жуық шешім ретінде

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{r} \varphi_k(t),\ t \in [0,T], \tag{2.67}$$

дәлдігі келесі өрнекпен бағаланады:

$$|x(t) - x_r(t)| = \left|\sum_{k=r+1}^{\infty} \varphi_k(t)\right| \le \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{NM^kT^k}{k!} = N\{\exp(MT) - \sum_{k=0}^{r} \frac{M^kT^k}{k!}\}$$

Бұл кез келген тұрақты басқару $u(t) \in U, t \in [0,T]$ үшін (2.65) қатарларының біркелкі және абсолютті жинақтылығын білдіреді. Теорема дәлелденді.

8-теорема. Егер (2.60) шарттың оң жағындағы x_{T} векторы $\boldsymbol{x_r}(T)$интервалдық векторына жатса, зерттелетін жүйе басқарылады.

Дәлелдеу. Т уақытындағы (2.65) жуық шешімді келесі интервалдық интегралдық өрнек түрінде қайта жазамыз.

$$\boldsymbol{x}_r(T) = \sum_{k=0}^{r} \boldsymbol{\varphi_k}(T), \tag{2.68}$$

$$\boldsymbol{\varphi_0}(T) = \boldsymbol{g}(T); \quad \boldsymbol{\varphi_{k+1}}(T) = \boldsymbol{g}(T) + \int_0^T \boldsymbol{f}(t,\tau,\boldsymbol{\varphi_k}(\tau))d\tau.$$

Мұндағы * белгі – интервальдық көбейтуді білдіреді, $\boldsymbol{x}_r(T)$ –$N\left\{\exp(MT) - \sum_{k=0}^{r} \frac{M^kT^k}{k!} =\right\} \le \varepsilon$ (ε - қажетті дәлдік) шартынан T және r уақытындағы интервал шекарасының векторы таңдалады.

Демек, егер x_{T} шекаралық векторы $\boldsymbol{x}(T)$ интервал векторында жатқандықтан, (2.57) - (2.60) жүйенің басқарылатындығы шығады.

Бұл теореманың дәлелденгенін білдіреді.

Егер зерттелетін жүйе басқарылатын болса (яғни (2.57) жүйенің (2.59) күйінен (2.60) күйіне ауысуын қамтамасыз ететін кем дегенде бір басқару u∈U болса), онда мәселені шешуден басқа қандай да бір критерийге минимумды жеткізетін басқару элементін таңдаған жөн (бұл қуат шығындары, жылдамдық және т.б. болуы мүмкін).

2.3.2 Сызықты емес жүйелердің басқарылуын зерттеу үшін критерийді қолдану

Церлемо есебі [80]. Басқарылатын процесс келесідей дифферннциалдық функциямен беріледі

$$\dot{x}_1 = \cos(x_3),$$
$$\dot{x}_2 = \sin(x_3),$$
$$\dot{x}_3 = u.$$

Басқаруға келесідей шарттар беріледі

$$u(t) \in U = \{u(t): -0.5 \leq u(t) \leq 0.5, t \in [0, \mathrm{T}]\}$$

Бастапқы күй ретінде төмендегң координаталар беріледі

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Соңғы күй ретінде келесі координаталар беріледі

$$x(10) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[81] жұмыста қарастырылған мысал үшін оңтайлы өнімділік уақыты 3.5-5 секунд аралығында болады.

Интервалды математика кітапханасын қолдана отырып сандық есептеу үшін [73] программалау тілінде бағдарлама жасалды, оның негізгі мәтіні Б қосымшасында келтірілген

Сызықты емес интервал теңдеулерді шеші үшін бағдарламада итерациялық сызықтандыру әдісі қолданылған. Интегралдар 0.05 қадамымен есептелді. Есептеудің нәтижесі 5 кестеде көрсетілген.

Кесте 5 – Сандық есептердің нәтижесі

Итерация	Уақыт	*x*1	*x*2	*x*3
1	0.5	(1,50 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,08)
1	1.0	(2,00 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,11)
1	1.5	(2,50 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,14)
1	2.0	(3,00 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,16)
1	2.5	(3,50 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,18)
1	3.0	(4,00 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,19)
1	3.5	(4,50 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,21)
1	4.0	(5,00 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,22)
1	4.5	(5,40 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,23)
1	4.95	(5,95 0,00)	(1,00 0,00)	(1,00 0,25)
2	0.5	(1,27 0,01)	(1,42 0,00)	(1,00 0,08)
2	1.0	(1,54 0,01)	(1,84 0,01)	(1,00 0,11)
2	1.5	(1,81 0,02)	(2,26 0,01)	(1,00 0,14)
2	2.0	(2,07 0,03)	(2,67 0,02)	(1,00 0,16)
2	2.5	(2,34 0,04)	(3,09 0,02)	(1,00 0,18)

Кесте 5 – жалғасы

Итерация	Уақыт	$x1$	$x2$	$x3$
2	3.0	(2,61 0,04)	(3,50 0,03)	(1,00 0,19)
2	3.5	(2,87 0,05)	(3,91 0,03)	(1,00 0,21)
2	4.0	(3,13 0,06)	(4,32 0,04)	(1,00 0,22)
2	4.5	(3,40 0,07)	(4,73 0,04)	(1,00 0,24)
2	4.95	(3,63 0,07)	(5,10 0,05)	(1,00 0,25)
3	0.5	(1,27 0,01)	(1,42 0,00)	(1,00 0,08)
3	1.0	(1,54 0,01)	(1,84 0,01)	(1,00 0,11)
3	1.5	(1,81 0,02)	(2,26 0,01)	(1,00 0,14)
3	2.0	(2,07 0,03)	(2,67 0,02)	(1,00 0,16)
3	2.5	(2,34 0,04)	(3,09 0,02)	(1,00 0,18)
3	3.0	(2,61 0,04)	(3,50 0,03)	(1,00 0,19)
3	3.5	(2,87 0,05)	(3,91 0,03)	(1,00 0,21)
3	4.0	(3,13 0,06)	(4,32 0,04)	(1,00 0,22)
3	4.5	(3,40 0,07)	(4,73 0,04)	(1,00 0,24)
3	4.95	(3,63 0,07)	(5,10 0,05)	(1,00 0,25)

Кестеде келтірілген сандық есептеулердің нәтижелері ұсынылған басқару критерийінің тиімділігін және оларды практикалық қосымшаларда қолдану мүмкіндігін көрсетті.

Химиялық реакторды басқару үшін интервалды талдауды қолдану

Үш заттың қоспасында жүретін химиялық реакциялардың математикалық моделі қарастырылады [82,83]:

$$\frac{dx_1}{dt} = -[K_1(u) + K_2(u) + K_3(u)]x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = K_1(u)x_1 - K_4(u)x_2, \tag{2.69}$$
$$\frac{dx_3}{dt} = K_4(u)x_2 - K_5(u)x_3, \qquad 0 \le t \le T.$$

мұнда, келесідей белгілеулер қолданылды:
$t_0 = 0$ – химиялық реакцияның басталуына сәйкес келетін уақыт аралығы.
T – реакцияның қатынастық уақыты (немесе реакцияның аяқталу уақыты);
$u(t)$– t уақыт мезетіндегі химиялық реактордың жұмыс аймағындағы абсолютті температураның мәні;
$x_1(t)$ – t уақыт мезетіндегі бастапқы заттың (шикізаттың) концентрациясы;
$x_2(t)$ – t уақыт мезетіндегі аралық өнімнің концентрациясы ;
$x_3(t)$ – t уақыт мезетіндегі соңғы өнімнің концентрациясы ;
$K_i(u)$, $i = \overline{1,\ 5}$ – температураға тәуелді реакциялардың қарқындылығы;
u_{max} – реактордың технологиялық сипаттамаларымен немесе өтіп жатқан реакцияның каталитикалық тұрақтылық жағдайымен анықталатын реактордағы ең жоғары мүмкін температура.

Бұл модельде реакцияның K_i, $i = \overline{1,\ 5}$ кинетикалық тұрақты жылдамдығы $K_1(u) = C_i e^{\frac{E_i}{R}\left[\frac{1}{658} - \frac{1}{u}\right]}$, $i = \overline{1,\ 5}$ заңға бағынады деп болжанады. Сәйкесінше, C_i, $i = \overline{1,\ 5}$ $i = \overline{1,\ 5}$ жиілік коэффициенті, және қуаттандыру энергиясы E_i, $i = \overline{1,\ 5}$ төмендегідей мәнге ие болады.

$C_1 = 1.02, \quad C_2 = 0.93, \quad C_3 = 0.386, \quad C_4 = 3.28, \quad C_5 = 0.084,$
$E_1 = 16000, \quad E_2 = 14000, \quad E_3 = 15000, \quad E_4 = 10000, \quad E_5 = 15000,$
әмбебап газ тұрақтысы
$R = 1.9865$

Реакцияның белгілі бір температуралық режимін орнату арқылы сіз оның ағу жылдамдығына және нәтижесінде алынған соңғы өнімнің мөлшеріне әсер ете аласыз. Осылайша, реакция температурасы бақылау ретінде әрекет етуі мүмкін. Болашақта температура уақыт өте келе өзгереді деп болжаймыз және оны $u(t)$ арқылы белгілейміз. Айта кету керек, химиялық реактор қандай болмасын, ондағы абсолютті температура 0 градустан төмен түсе алмайды және әр реактор үшін оның технологиялық сипаттамасымен анықталатын белгілі бір мәннен жоғары көтеріле алмайды.

Осылайша, химиялық реакторды басқару міндеті-реакцияның оңтайлы температуралық режимін және химиялық реактордың ең жоғары өнімділігін қамтамасыз ететін оңтайлы байланыс уақытын табу.

Реакция басталған кезде реакторда аралық өнім мен соңғы өнім болмайды, яғни олардың концентрациясы нөлге тең. Шикізаттың концентрациясы, керісінше, максималды және 1-ге тең. Осылайша, бастапқы шарттар пайда болады

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0. \tag{2.70}$$

Жоғарыда айтылғандай, реактордың жұмыс аймағындағы температура теріс болуы мүмкін емес және кейбір шекті мәннен асып кетуі мүмкін. Осылайша, басқару мәндеріне шектеулер қоямыз

$$0 \le u(t) \le u_{max} \forall t \in [0, T], \tag{2.71}$$

Реакцияның каталитикалық тұрақтылығы жағдайларынан таңдалған реактордың жұмыс аймағындағы температураның мүмкін болатын шекті мәні $u_{max} = 823$-ке тең.

[83] жұмысында химиялық реакторды оңтайлы басқаруды таңдау міндеті қарастырылған. Алайда химиялық реактордың басқарылуын анықтау міндеті өзекті болып қалуда, яғни тіркелген T уақыт кезінде (2.71) шартты қанағаттандыратын және (2.70) жүйені қажетті күйден

$$x_1(T) = X_1, x_2(T) = X_2, x_3(T) = X_3, \tag{2.72}$$

күйге аударатын $u(t)$ басқаруын анықтау.

Осы мәселені шешу үшін [83] жұмысқа енгізілген интервалды математиканы қолданамыз. Жұмыста [84] интервалды математиканы қолдану негізінде стационарлық емес сызықтық жүйелерді басқару критерийі алынды. Алайда, осы жұмыста қарастырылған жүйе сызықты емес, бұл зерттеу мәселесін едәуір қиындатады.

(2.69) Жүйені интегралды түрде қайта жазамыз

$$x_1(t) = x_1(0) - \int_0^t [K_1(u) + K_2(u) + K_3(u)]x_1 dt,$$
$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t [K_1(u)x_1 - K_4(u)x_2]\, dt \qquad (2.73)$$
$$x_3(t) = x_3(0) + \int [K_4(u)x_2 - K_5(u)x_3]\, dt, \qquad 0 \le t \le T.$$

h қадаммен (2.73) теңдеулер жүйесін дискреттейміз: (2.73) оң жағын қатарлар бойынша интегралдаймыз

$$x_1(t+h) = x_1(t) - h[K_1(u(t)) + K_2(u(t)) + K_3(u(t))]x_1(t),$$
$$x_2(t+h) = x_2(t) + h[K_1(u(t))x_1(t) - K_4(u(t))x_2(t)],$$
$$x_3(t+h) = x_3(t) + h[K_4(u(t))x_2(t) - K_5(u(t))x_3(t)],\ 0 \le t \le h \qquad (2.74)$$

u қандай да бір интервал болсын және $u = \left(\frac{u_{max}}{2}, \frac{u_{max}}{2}\right)$ арқылы белгіленсін. Мұндағы $\overline{u} = u_{max}/2$ интервал центрі, $u_\varepsilon = u_{max}/2$ – интервал радиусы. $u(t)$ орнына $(\overline{u}, u_e)$ интервалын қойып және (2.73) интервал математикасына қоя отырып

$$x_1(t+h) = SubIn\Big(x_1(t), h * MultIn\big(FunInt([(AddIn(AddIn(K_1(u), K_2(u), K_3(u(t))]), x_1(t)\big)\Big), \qquad (2.75)$$
$$x_2(t+h) = AddIn\big(x_2(t), h * SubIn([MultIn(K_1(u), x_1(t)), MultIn(K_4(u), x_2(t)])\big),$$
$$x_3(t+h) = AddIn(x_3(t), h * [SubIn(MultIn(K_4(u), x_2(t)), MultIn(K_5(u, x_3(t)])), \quad 0 \le t \le h$$

аламыз. Мұндағы u-басқарудың интервалдық векторы және сәйкесінше күй векторы интервал болып табылады, (2.73) формуладағы барлық операциялар – SubIn, AddIn, MultrIn – жұмыста анықталған ережелерге сәйкес жүзеге асырылды. FuncInt(u) функциясы сызықтық емес интервалдық функцияларды есептеу ережелері бойынша да анықталған [73]. 0 ден T дейінгі уақыт аралығында (2.74) интервалды формула бойынша есептей отырып, $t = T$ кезінде $\boldsymbol{y_T} = (x_1(T), x_2(T), x_3(T))$ интервал векторын аламыз.

Элементтері (2.75) мәндеріне ие болатын $x = (X_1, X_2, X_3)$, құрамыз.

4 теоремадан: (2.69)-(2.71) жүйенің басқарылуы үшін $\overline{x}$ векторы $x_{\boldsymbol{T}}$ интервалдық векторына тиесілі болуы жеткілікті.

Программалау тілінде сандық модельдеу үшін ұсынылған басқару критерийін және интервалды есептеудің арифметикалық амалдарын есептеуді жүзеге асыратын бағдарлама жасалды.

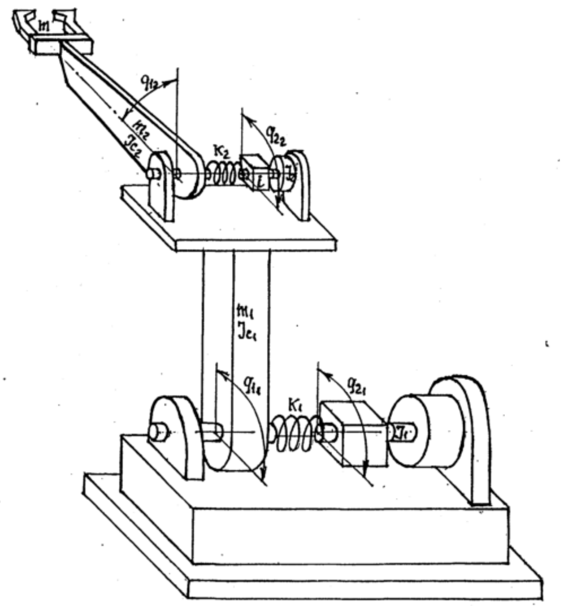
Сандық есептеулер көрсеткендей, T=1 уақыт ішінде (2.69) жүйе (2.71) шектеулерді орындау кезінде (2.70) бастапқы күйден келесі күйлерге ауыстырылуы мүмкін:

$$X_1 \in (0.086, 0.090), X_2 \in (0.059, 0.063), \quad X_3 \in (0.323, 0.325). \qquad (2.76)$$

Екі буынды роботтың басқарылатындығын зерттеу үшін интервалды талдауды қолдану

7-суретте көрсетілген тегіс екі буынды топсалы манипулятордың математикалық моделі қарастырылған [85].

Қозғалыс теңдеулерін құрастырған кезде жүйенің келесі параметрлері ескерілді: l_1 және l_2 – буындар ұзындығы, l_{c_1} және l_{c_2} – инерция центрлерінің координаталары, m_1 және m_2 – буындар салмағы, m – жүкпен ұстағыштың салмағы, J_{c_1} және J_{c_2} – буындардың массалар центрлері арқылы өтетін осьтерге қатысты буындардың инерция моменттері, J_1 және J_2 – ілмектер осіне дейін азайтылған қозғалтқыштардың роторларының инерция моменттері (бірінші қозғалтқыш басты орнатылған, ал бірінші буында орнатылған екінші қозғалтқыштың жалпы салмағы бірінші буынның сәйкес параметрлерімен ескеріледі), i – екінші қозғалтқыштың беріліс қатынасы [86].



Сурет 7 – Екі буынды топсалы манипулятор түрі «PUMA 550 / 560» [87]

Қозғалыс теңдеулері келесі модель арқылы сипатталады

$$\begin{cases} D(q_1)\ddot{q}_1 + B(q_1)\ddot{q}_2 + C_1(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2)\dot{q}_1 + C_2(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_2 + K(q_1 - q_2) + g(q_1) = 0 \\ J\ddot{q}_2 + B^T(q_1)\ddot{q}_1 + C_3(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1 + K(q_2 - q_1) = u \end{cases} \qquad (2.77)$$

мұндағы

$q_1 = \begin{bmatrix} q_{1_1} \\ q_{1_2} \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} q_{2_1} \\ q_{2_2} \end{bmatrix}$ – сәйкесінше буындар мен роторлардың айналу бұрыштарының векторлары;

$$D(q_1) = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2\cos(q_{1_2}) & a_3 + a_2\cos(q_{1_2}) \\ a_3 + a_2\cos(q_{1_2}) & a_3 \end{bmatrix};$$

$$B(q_1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_2}{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} C_1(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2) & C_2(q_1, \dot{q}_1) \\ C_3(q_1, \dot{q}_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2\dot{q}_{1_2}(2\dot{q}_{1_1} + \dot{q}_{1_2})\sin(q_{1_2}) \\ a_2\dot{q}_{1_1}\sin(q_{1_2}) \end{bmatrix}; \tag{2.78}$$

$$g(q_1) = \begin{bmatrix} (ml_2 + m_2l_{c_2})g\cos(q_{1_1} + q_{1_2}) + (m_1l_{c_1} + m_2l_1 + ml_1)g\cos(q_{1_1}) \\ (ml_2 + m_2l_{c_2})g\cos(q_{1_1} + q_{1_2}) \end{bmatrix};$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix};$$

$$a_1 = m(l_1^2 + l_2^2) + m_1l_{c_1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c_2}^2) + J_{c_1} + J_{c_2} + \frac{J_2}{i^2};$$

$$a_2 = l_1(ml_2 + m_2l_{c_2});$$

$$a_3 = ml_2^2 + m_2l_{c_2} + J_{c_2}.$$

Белгілеу енгіземіз:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1_1} \\ q_{1_2} \\ \dot{q}_{1_1} \\ \dot{q}_{1_2} \\ q_{2_1} \\ q_{2_2} \\ \dot{q}_{2_1} \\ \dot{q}_{2_2} \end{pmatrix}, \tag{2.79}$$

$$[a_1 + 2a_2\cos(x_2)] * \dot{x}_3 + [a_3 + a_2\cos(x_2)] * \dot{x}_4 + \frac{J_2}{i}\dot{x}_8 - a_2x_4(2x_3 + x_4) * \sin(x_2) + k_1x_1 + (ml_2 + m_2l_{c_2}) * g * \cos(x_1 + x_2) + (m_1l_{c_1} + m_2l_1 + ml_1) * g * \cos(x_1) = 0$$

$$[a_3 + a_2\cos(x_2)] * \dot{x}_3 + a_3\dot{x}_4 - a_2x_4 * (2x_3 + x_4) * \sin(x_2) - k_2x_6 + (ml_2 + m_2l_{c_2}) * g * \cos(x_1 + x_2) = 0$$

$$J_1\dot{x}_7 + a_2x_{3*}\sin(x_2) + k_1x_5 = u, \tag{2.80}$$

$$J_2\dot{x}_8 + \frac{J_2}{i}\dot{x}_4 + a_2x_3 * \sin(x_2) - k_2x_2 = u$$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_5 = x_7$$

$$\dot{x}_6 = x_8$$

Егер $A(x)$ функцияларының 8х8-матрицасын және $B(x,\ u)$ функциясының 8-векторлық функциясын келесі элементтермен енгізсек

$a_{11} = 1;\ a_{12}$ =0; $a_{13} = 0;\ a_{14} = 0;\ a_{15} = 0; a_{16} = 0;\ a_{17} = 0;\ a_{18} = 0;$

$a_{21} = 0;\ a_{22} = 1; a_{23} = 0;\ a_{24} = 0;\ a_{25} = 0; a_{26} = 0;\ a_{27} = 0;\ a_{28} = 0;$

$a_{31} = 0;\ a_{32} = 0; a_{33} = [a_1 + 2a_2\cos(x_2)];\ a_{34} = [a_3 + a_2\cos(x_2)];$

$a_{35} = 0; a_{36} = 0;\ a_{37} = 0;\ a_{38} = J_2/i;$

$a_{41} = 0;\ a_{42} = 0; a_{43} = [a_3 + a_2\cos(x_2)];\ a_{44} = a_3;$

$a_{45} = 0; a_{46} = 0;\ a_{47} = 0;\ a_{48} = 0;$

$a_{51} = 0;\ a_{52} = 0; a_{53} = 0;\ a_{54} = 0;\ a_{55} = 1; a_{56} = 0;\ a_{57} = 0;\ a_{58} = 0;$

$a_{61} = 0;\ a_{62} = 0; a_{63} = 0;\ a_{64} = 0;\ a_{65} = 0; a_{66} = 1;\ a_{67} = 0;\ a_{68} = 0;$

$a_{71} = 0;\ a_{72} = 0; a_{73} = 0;\ a_{74} = 0;\ a_{75} = 0; a_{76} = 0;\ a_{77} = J_1;\ a_{78} = 0;$

$a_{81} = 0;\ a_{82} = 0; a_{83} = 0;\ a_{84} = J_2/i;\ a_{85} = 0; a_{86} = 0;\ a_{87} = 0;\ a_{88} = J_2;$

$b_1 = x_3;\ b_2 = x_4;$

$b_3 = a_2x_4(2x_3 + x_4) * \sin(x_2) - k_1x_1 - \left(ml_2 + m_2l_{c_2}\right) * g * \cos(x_1 + x_2)\ - \left(m_1l_{c_1} + m_2l_1 + ml_1\right) * g * \cos(x_1)\,;$

$b_4 = a_2x_4 * (2x_3 + x_4) * \sin(x_2) + k_2x_6 - \left(ml_2 + m_2l_{c_2}\right) * g * \cos(x_1 + x_2)\,;$

$b_5 = x_7;\ b_6 = x_8;$

$b_7 = -a_2x_{3*}\sin(x_2) - k_1x_5 + u;$

$b_8 = -a_2x_3 * \sin(x_2) + k_2x_2 + u;$

Сонда дифференциалдық теңдеулер жүйесін (2.80) вектор түрінде қайта жазуға болады

$$A(x) * \dot{x} \quad = B(x,u) \tag{2.81}$$

(2.77) теңдеуді (2.57) сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде қайта жазамыз, $A(x)$ кері матрицасын есептеу керек, содан кейін векторлық функция

$$f(x,u) = A^{-1}(x) *\ B(x,u) \qquad . \tag{2.82}$$

Элементтері 8 айнымалыға тәуелді $A(x)$ матрицалық күрделілігіне байланысты келесі мәндермен PUMA 550/560 роботына [87] келесі есептеулер жүргізілетін болады:

$i = 1 \ldots 1000;\ k_1 = 25000$ Нм; $k_2 = 6500$ Нм;

$l_{c_1} = l_{c_2} = 0.1$ м; $l_1 = l_2 = 0.5$ м;

$m_1 = 40$ кг; $m_2 = 24$ кг; $m = 5$ кг;

$J_{c_1} = 2.1$ кг м^2; $J_{c_2} = 0.7$ кг м^2; $J_1 = 20$ кг м^2; $J_2 = 3$ кг м^2.

Аналитикалық есептеулерді жүргізу үшін Matlab жүйесінде жүзеге асырылатын бағдарламаны қолданамыз. Бағдарламаның мәтіні қосымшада келтірілген.

Төменде бағдарламаның нәтижелері келтірілген

$A(x)$ = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 981/50+67/10*cos(x2), 123/20+67/20*cos(x2), 0, 0, 0, 3]
[0, 0, 123/20+67/20*cos(x2), 123/20, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 20, 0]
[0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 3]

$B(x,u)$ = [x3]
[x4]
[67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-25000*x1-67/10*cos(x1+x2)-55/2*cos(x1)]
[67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-6500*x6+67/10*cos(x1+x2)]
[x7]
[x8]
[-67/20*x3*sin(x2)-25000*x5+u]
[-67/20*x3*sin(x2)-6500*x2+u]

$A^{-1}(x)$ = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, -12300/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2), 100*(63+67*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2), 0, 0, 0, 12300/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)]
[0, 0, 100*(123+67*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2), -40*(981+335*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2), 0, 0, 0, -100*(123+67*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/20, 0]
[0, 0, -100*(123+67*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2), 40*(981+335*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2), 0, 0, 0, 1/3*(-165681+22445*cos(x2)^2)/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)]

$f(x,u) = A^{-1}(x) * B(x,u)$ =
[x3]
[x4]
[-12300/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)*(67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2) -25000*x1-67/10*cos(x1+x2)-55/2*cos(x1))+100*(63+67*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)*(67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-6500*x6+67/10*cos(x1+x2))+12300/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)*(-67/20*x3*sin(x2)-6500*x2+u)]
[100*(123+67*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)*(67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-25000*x1-67/10*cos(x1+x2)-

55/2*cos(x1))-40*(981+335*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)
+22445*cos(x2)^2)*(67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-6500*x6+67/10*cos(x1+x2))-100*(123+67*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)*(-67/20*x3*sin(x2)-6500*x2+u)]
[x7]
[x8]
[-67/400*x3*sin(x2)-1250*x5+1/20*u]
[-100*(123+67*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)
+22445*cos(x2)^2)*(67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-25000*x1-67/10*cos(x1+x2)-55/2*cos(x1))+40*(981+335*cos(x2))/(-202581-20100*cos(x2)
+22445*cos(x2)^2)*(67/20*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-6500*x6   +67/10*cos(x1+x2))
+1/3*(-165681+22445*cos(x2)^2)/(-202581-20100*cos(x2)+22445*cos(x2)^2)*(-67/20*x3*sin(x2)-6500*x2+u)]

Басқаруға шектеу берілген

$$u(t) \in U = \{u(t): -10.0 \leq u(t) \leq 10.0, t \in [0, \mathrm{T}]\} \tag{2.83}$$

Координаттар бастапқы күй ретінде берілген

$$x(0) = (0 \quad 0 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1). \tag{2.84}$$

Ал ақырлы күй ретінде келесідей координаттар берілген

$$x(10) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0). \tag{2.85}$$

Есепті шешу үшін интервалды математика мен 3-теореманы қолданамыз. Программалау тілінде сандық модельдеу үшін ұсынылатын басқарылу критерийі мен интервалды есептеудің арифметикалық амалдарын есептеуді жүзеге асыратын бағдарлама жасалды. Бағдарламаның мәтіні қосымшада келтірілген.

Сандық есептеулер көрсеткендей, $T = 10$ уақыт ішінде жүйе $\dot{x} = f(x, u)$ (2.83) шектеулер орындалған кезде оны (2.84) бастапқы күйден (2.85) күйге көшіруге болады.

2.4 Бөлімге қорытынды

Бөлімде жаңа интервалды математиканың анықтамасы берілді және олардың қасиеттері зерттелді. Классикалық интервалды математикамен салыстыру жүргізілді.

Классикалық есептерді шешу негізінде енгізілген интервалды математиканың тиімділігі көрсетілді.

Сызықты жүйелерді басқару критерийі келтірілді.

Сызықты емес жүйелерді басқару критерийі тұжырымдалды және дәлелденді.

3 РОБОТОТЕХНИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР ДИНАМИКАСЫНЫҢ ТЕҢДЕУЛЕРІН ШЫҒАРУ ҮШІН АНАЛИТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕУ ЖҮЙЕСІН ҚОЛДАНУ

3.1 Аналитикалық есептеу жүйесі. Бағдарламалық іске асыру

Әр түрлі робототехникалық жүйелерді зерттеу кезінде ең жауапты және көп уақытты қажет ететін (күнделікті) жұмыс математикалық модель құрастыру, яғни өтпелі кезеңдерді сипаттайтын теңдеулерді шығару болып табылады. Соңғы алынған практикалық ұсыныстардың (зерттеу нәтижелері) сапасы зерттелетін процестің математикалық моделін құру дәлдігіне тікелей байланысты [88-89]. Сондықтан модельдерді құру процесін автоматтандыруға мүмкіндік беретін аналитикалық есептеу жүйелерін (АЕЖ) дамыту өзекті мәселе болып табылады [90-91].

АЕЖ алгебралық нысандарда (өрнектер, матрицалар, жолдар) барлық уақытты қажет ететін операцияларды автоматты түрде жасай отырып, символдық түрдегі есептерді шешуге мүмкіндік береді: есептеу, ауыстыру, жеңілдету, дифференциалдау, интегралдау. Бұл әдісітің есептерді сандық шешу әдістерінен айырмашылығы, бұл әдіс бір математикалық модельді басқасымен алмастырмайды, және нағыз жаңа нәтижелер алуға мүмкіндік беретін жуық емес, нақты шешімдер береді. ЭЕМ қолдану нәтижелерді алудың қатесіз және жылдам болуын, жүйелердің икемделуін және кеңейтілуін қамтамасыз етеді [92-93].

Автоматтандырылған ғылыми-зерттеу жүйелерін қолданудың маңызды аспектілерінің бірі алгебралық өрнектерді түрлендіруді яғни өрнектерді дифференциалдау мен интегралдауға жеңілдетуден бастап автоматтандыратын аналитикалық (символдық) есептеу жүйелері болып табылады. Кез-келген математикалық модельді зерттеуші күн сайын осындай операцияларға тап болады. Компьютерлік алгебра жүйелері аналитикалық (символдық) есептеулерді орындау үшін арнайы процессормен жабдықталған. Оның негізі – аналитикалық есептеулер жүргізілетін формулалар мен формулалық түрлендірулердің бүкіл жиынтығын сақтайтын ядро [94].

АЕЖ химиялық реакциялардың теңдеулерін шығаруда, сондай-ақ Лагранж II теңдеулерін қолдана отырып, робототехникалық жүйелердің математикалық моделін алу үшін қолданыла алады.

Іске асыратын ЭЕМ түрі. Ұсынылатын талаптар: Pentium/AMD, тактілік жиілігі – 2 ГГц – тен төмен емес, ЖЖҚ – 1 ГБ – тан кем емес, қатқыл дискідегі бос орын көлемі-1 ГБ-тан кем емес, операциялық жүйелер-Windows.

Минималды талаптар: Pentium/AMD, тактілік жиілігі – кемінде 600 МГц, жедел жады – кемінде 256 МБ, қатқыл дискідегі бос орын көлемі – кемінде 500 МБ, операциялық жүйелер - Windows.

Функционалдық мүмкіндіктердің сипаттамасы

АЕЖ-да мынадай базалық функциялар іске асырылған:

- алгебралық өрнекті сипаттайтын мәтіннің кіріс жолын талдау және синтаксистік қателерді анықтау процедурасы;

- кіріс жолында өрнек ағашын бір мәнді құру және семантикалық қателерді анықтау процедурасы;
- сандық өрнекті есептеу, айнымалы мәндерді алмастыру арқылы есептеу, ішінара есептеу және қателерді анықтау (толып кету, функция аргументінің қатесі, нөлге бөлу және т. б.).);
- жақшаларды ашу және өрнек ағашын оның семантикасына сәйкес өзгерту процедурасы;
- бір өрнектің екінші өрнекке ауыстырылуының бірнеше түрі және айнымалы тәуелділіктердің циклдік сәйкестігін тексеру;
- көрсетілген айнымалылар бойынша еркін дәрежедегі өрнекті саралау рәсімі.

Барлық функциялар өрнек ағашымен жұмыс істеудің рекурсивті процедуралар түрінде жасалады.

Пакет – бұл модульдердің жиынтығы, олардың әрқайсысында мәліметтер типтері, айнымалылар және функциялар жиынтығы бар. Іске асырылған функциялардың барлық жиынтығын бірнеше модульдерге бөлу олардың өзара тәуелділігі мен өрнек ағашында орындалатын операциялардың логикалық байланысына байланысты. Осылайша, пакет 9 модульден тұрады: S_Init, S_Misc, S_Scaner, S_Tree, S_Sort, Intrface, S_Matrix, SAV.

Схемалық түрде модульдердің өзара тәуелділігі келесідей:

S_Misc : S_Init;
S_Scaner: S_Init, S_Misc;
S_Tree : S_Init, S_Misc;
S_Sort : S_Init, S_Misc, S_Tree;
Intrface : S_Init, S_Misc, S_Tree, S_Sort
S_Matrix: S_Init, S_Misc, S_Tree, S_Sort
SAV : S_Init, S_Misc, S_Tree, S_Sort, S_Matrix.

Модуль S_Init.

Модульді барлық тұрақтыларды, жиындарды, деректер түрлерін және глобалды айнымалыларды анықтайды:

- максималды нақты санның тұрақтысы, кірістірілген функциялар саны, идентификатордағы таңбалардың максималды саны, әртүрлі айнымалылар саны, ұқсас мүшелер саны, шығару кезіндегі ондықтар саны;
- әріптер, сандар, Бос орындар, аддитивті және мультипликативті, инфикс операторлары, идентификатор таңбалары және өрнектер жиынтығы;
- оператор таңбаларының тұрақты атаулары, әр түрлі жақша белгілері, сканер қолданатын белгілер (лексикалық талдау кіші бағдарламасы), түстер.
- екілік ағаштың шың түрі;
- шыңға нұсқаулық(адресс) типі;
- шың типінің мән типі;

- өрнекті лексикалық талдаудағы сандар тізбегінің түрі (және осы типтегі көрсеткіш) ;
- барлық айнымалыларды олардың мәндерімен (өрнектерімен) қамтитын айнымалылар массиві);

25-кіріктірілген функцияның атау кестесін инициализациялау: абсолютті мән, тригонометриялық функциялар, квадратқа шығару, логарифм, экспонент, белгі функциясы, факториал.

S_Misc Модулі.

Ағашты басқарудың барлық басқа процедураларында қолданылатын барлық көмекші функциялар осында орналастырылған:

- көрсетілген типтегі жаңа шынды құру;
- көрсетілген функция бойынша кодты табу;
- көрсетілген код бойынша функция атауын табу;
- глобалды айнымалы кестесі бойынша айнымалы кодты табу;
- қате туралы хабарды басып шығару;
- көрсетілген операция түріне сәйкес жаңа жоғарғы-операцияларды жасау;
- көрсетілген мәні бар жаңа шыңды-сандарды құру;
- жаһандық кестеде көрсетілген атаумен жаңа айнымалыны орналастыру;
- көрсетілген файлдарда бос орындарды өткізіп жіберу;

S_Scaner Модулі.

Сканердің екі бөлігін қамтиды:

- көрсетілген жолдың лексикалық талдауы (Scan) өрнекте кездесетін айнымалылар мен сандар кестесін құру жалаушасымен және осы кестелердің басындағы көрсеткіштермен (тізім түрінде енгізілген), кодталған жолды-өрнектің кескінін және ағашты одан әрі құру үшін толтырылған кестелерді қайтарады;
- кескін жолын талдау және сәйкес ағаштың құрылысы, оны көрсетілген айнымалымен байланыстыру (Scan_n_BuildTree).

S_Tree Модулі.

Келесідей негізгі функцияларды ұсынады:

- өрнек ағашын көрсетілген шыңға көшіру (CopyTree);
- өрнекте жақшаларды ашу;
- ұқсас мүшелерді (ModifyTree) келтіру процедурасы арқылы оны одан әрі жеңілдету үшін ағашты модификациялау;
- көрсетілген өрнекке қосымша өрнектерді қою;
- көрсетілген айнымалы дифференциалдау;
- көрсетілген ағашты есептеу мүмкіндігі. Егер барлық айнымалыларда сандық мәндер болса, өрнектің мәнін қайтарады. Әйтпесе, OK айнымалысына сәтсіздік мәнін қайтарады, өйткені мәнді есептеу мүмкін емес. Функция ағашты өзгертеді-оны жеңілдетеді, есептеуге болатын қосымша мәндермен негізгі мәндерді алмастырады. Сондықтан бастапқы ағашты сақтау үшін оның көшірмесін жасау керек, ол есептеу функцияларын береді.

- өрнек ағашын басып шығару процедурасы. Басып шығарудың әртүрлі нұсқалары арасында ауысудың қарапайымдылығы үшін бұл процедура (PrintTree) операцияны өзі орындамайды, бірақ өз кезегінде қажетті функцияны шақырады. Алынған жолдың максималды ұзындығы - 64 Кб немесе 65535 таңба.

S_Sort Модулі.

Мұндай мүшелерді келтіру және өрнекті түпкілікті жеңілдету осы модульде жүзеге асырылады. Reduce процедурасы келесіде Sort процедурасын шақырады, ол өрнектің барлық мүшелерін канондық түрге келтіреді, ұқсас мүшелерді шақырады және оларды сұрыптайды.

IntrFace Модулі.

Жүйе ядросының ішкі процедураларының арасында және кеңетілетін немесе қолданушы арқылы бағдаламаланатын мүмкін болатын модулдермен жұмыс жасауда үлкен роль алады. Дегенмен ол негізгі алгоритмдер мен деректер түрлерінің ішкі іске асырылуының егжей-тегжейін білмеуі мүмкін, соған қарамастан өзінің есептерінің шешімін дұрыс таба алады. Негізгі алгоритмдерді өзгерту (мысалы, оңтайландыру) модульдерде-кеңейтімдерде немесе пайдаланушының қолданбалы пакеттерінде өзгертулерді қажет етпейді.

S_Matri Модулі.

Бұл еркін өлшемді матрицалармен, 2 және 3 өлшемді матрицалардың массивтерімен жұмыс істеуге мүмкіндік беретін жүйе ядросының кеңеюі. Матрицаларды қосу, азайту, көбейту, матрицаның ізін табу, көшіру және нөлдеу процедураларын жүзеге асырады және қамтамасыз етеді.

3.2 Қосымшаларды құру кезінде АЕЖ кітапханалық функцияларын қолдану

Интерпретатор нәтижелерді тез алуға арналған, өйткені ол команданы оқығаннан кейін тікелей көрсетілген әрекеттерді орындайды, мысалы тағайындау, ауыстыру. Оны пайдалану үшін бірнеше командалардың синтаксисін қарап, олардың реттілігін экраннан енгізу арқылы бірден бастау жеткілікті. Егер сіз кіріс пәрмендерін автоматтандыруды және/немесе сақтауды қаласаңыз, пайдаланушы аудармашы тіл операторларының реттілігін қамтитын мәтіндік файл жасайды. Нәтиже экранда да, көрсетілген файлда да көрсетілуі мүмкін.

Кітапхана функциялары

Кітапхана функциясын тікелей пайдаланған кезде пайдаланушы өрнектерді басқаруға және аяқталған қосымшаларды құруға көбірек мүмкіндіктер алады. Бұл жағдайда ол өз бағдарламасын жүйені іске асыру тілінде жасайды. Келесі мүмкіндіктер қарастырылады:

- басқару операторларының көмегімен есептеу тізбегін басқару: циклдар, таңдау, шарт;
- кітапхана функцияларын таңдамалы қолдану;
- кіші процедуралар мен функцияларды енгізу;

- жинақтау және көбейту мәлімдемелерін модельдеу үшін итерацияларды қолдану;
- интерфейсті құру және енгізу/шығару құралдарының толық жиынтығын қолдану;
- орындаудың ең жоғары жылдамдығына жету үшін жаңа кіші бағдарламаларды құрастыру;
- әр түрлі сандық шығыс форматы

Келесідей процедуралар ұсынылды:

SetIt (x, E) – айнымалы x еркін E өрнегіне меншіктеу;

SetTo (x, n) – x айнымалысын n сандық мәніне меншіктеу;

SetNode (Expr) – берілген өрнекке сәйкес келетін ағашқа меңзерді қайтарады;

PrintIt (x) – x айнымалы мәнін қайтарады;

DiffIt (dx, d, E, dEx) – dx айнымалысы бойынша E өрнегін d рет дифференциалдап, нәтижесін dEx жазады.

SubstIt (Var, List, Result) – List тізімінде көрсетілген айнымалыларды Var айнымалысына қою және нәтижені Result айнымалысына жазу;

JoinTrees (T1, Sign, T2) – инфикс операциясымен байланысқан T1 және T2 операндаларынан тұратын өрнек ағашын қайтарады: қосу, алу, көбейту, бөлу, дәрежеге көтеру;

FuncTree (Fname, T) – көрсетілген функцияның өрнегін T аргументінен қайтарады;

OpenIt (E) – E өрнегіндегі жақшаларды ашу.

Матрицалармен жұмыс модулі.

S_Matrix модулі матрицалармен жұмыс жасайтын келесі функцияларды ұсынады:

NewMx (A, m, n) - mxn өлшемдегі жаңа A матрицасын құру;

CopyMx (A) – көрсеткішті A матрицасының көшірмесіне қайтарады;

ReadMx (F,A) – көрсетілген F файлынан A матрицасының элементтерін оқиды;

PrintMx (A) – көрсетілген файлға A матрицасын басып шығарады;

ZeroMx (A) – A матрицасын қалпына келтіреді;

AddMx (A,B) – A және B матрицаларының қосындысын қайтарады;

SubMx (A,B) – A және B матрицаларының айырмасын қайтарады;

MultMx (A,B) – A және B матрицаларының көбейтіндісін қайтарады;

MultBy (S,A) – S скалярына көбейтілген A матрицасын қайтарады;

SetEl (A,i,j,E) – A[i,j] элементіне E мәнін меншіктейді;

DiffMx (dv,A) – dv айнымалысы бойынша дифференциаланған A матрицасын қайтарады;

TranspMx (A) – кері A матрицасын қайтарады;

DisposeMx (A) - A матрицасымен қамтылған жадты босатады;

Track (A) – A матрицасының ізін қайтарады.

3.3 II типтегі Лагранж динамикасының теңдеулерін алу

n-буын манипуляторының қозғалыс динамикасын сипаттау үшін II типтегі Лагранж теңдеуі матрицалық түрде жазылады:

$$\sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i} tr\left(U_{ij}H_iU_{ik}^T\right)\ddot{q_k} + \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr\left(U_{ij}H_iU_{ikl}^T\right)\dot{q_k}\dot{q_l} -$$
$$-\sum_{i=j}^{n} m_iGU_{ij}^TR_i = Q_j, \quad j = \overline{1,n}\ ,$$

мұндағы, $U_{ij} = A_1A_2 \dots dA_j\ /\ dq_j \dots A_i, \quad i,j = \overline{1,n}.$

$$A_i = \left\|\begin{matrix} \cos(Q_i) & -\sin(Q_i)\cos(\alpha_i) & \sin(Q_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(Q_i) \\ \sin(Q_i) & \cos(Q_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(Q_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(Q_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

i-1 буынының координаттар жүйесінен i-ге өту матрицасы, буынның инерциясын сипаттайтын матрица

$$H_{ij} = \left\|\begin{matrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} & m_ix_i \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} & m_ix_i \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} & m_ix_i \\ m_ix_i & m_iy_i & m_iz_i & m_i \end{matrix}\right\| H_i = \left\|\begin{matrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} & m_ix_i \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} & m_ix_i \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} & m_ix_i \\ m_ix_i & m_iy_i & m_iz_i & m_i \end{matrix}\right\|$$

i, x_i, y_i, z_i – ауырлық центрі, m_i – буынның массасы, J_{xx} – i сілтеменің меншікті осьтеріне қатысты инерция тензорының элементтері,

$$V_{ikl} = \frac{dU_{ik}}{dq_i}$$

$$G = [0 \quad 0 \quad -g \quad 0]^T$$, мұндағы g – еркін түсу үдеуі.

$$T_i = A_1 \cdot A_2 \dots A_i$$

$$R_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1]^T$$

x_i, y_i, z_i - меншікті координаттар жүйесіндегі ауырлық центрі.

Енді Q_i жалпыланған күштердің мәндерін символдық түрде алу кітапхана функцияларын қолдануға және процедура түрінде өрнекті құрудың барлық реттілігін жасауға дейін азаяды. Іске асырудың қарапайымдылығына қол жеткізілді, өйткені іске асырудың барлық бөлшектері (өрнекті тану, жеңілдету және т.б.) пайдаланушы үшін жасырын және міндетті емес, сонымен қатар жазбаша процедура жүйенің «функционалдығы» кітапханасын автоматты түрде кеңейтеді және жөндеуді қажет етпейді, өйткені ол математикалық формуланы тікелей жүзеге асырады. Сонымен қатар, құрастырылған кезде процедура жүйенің ядросының негізгі функциялары сияқты максималды жылдамдықта орындалады.

```
for j := 1 to n  do begin QP[j] := SetNum(0);
for i := j to n do for k := 1 to i do begin
          QP[j] := OpeTrees(QP[j], '+',
          OpeTrees(Track(MultMx(U[i,j], MultMx(H[i], TranspMx(U[i,k])))),
          '*', d2q[k]));
end;
for i := j to n do for k := 1 to i do for l:=1 to i do begin
          QP[j] := OpeTrees (QP[j], '+',
          OpeTrees (Track(MultMx(U[i,j], MultMx(H[i], TranspMx(V[i,k,l])))),
           '*',  OpeTrees (dq[l], '*', dq[k]) ));
end;
for i := j to n do begin
          QP[j] := OpeTrees (QP[j], '-',
          OpeTrees (m[i], '*', Track(MultMx(G, MultMx (U[i,j],R[i])) )));
end;
end;
```

Біз үш байланысы бар робот-манипулятордың мысалында АЕЖ-ның жұмысын көрсетеміз. Sav.exe бағдарламасын шақыру керек. Робот манипуляторының теңдеулерін шығару режиміне арналған кірістер Robot2.Dat файлында орналасқан. Төменде Robot2.Dat файлының мазмұны берілген:

```
3;
q1;      0;    0;   0;
Pi;    Pi/2;   q2;   0;
 0;      0;   q3;   0;
```

Бағдарламаның нәтижелері Robot2.Out (Г Қосымшасында көрсетілген) файлына шығарылады.

3.4 Бөлім бойынша қорытындылар

Бөлімде аналитикалық есептеулер жүйесі (АЕЖ) сипатталған, оның көмегімен әртүрлі робототехникалық жүйелердің математикалық модельдерін автоматтандырылған режимде алуға болады. Түрлі робототехникалық жүйелер зерттелді, қойылған міндеттің өзектілігі көрсетілді. Лагранж II текті теңдеулер көмегімен робототехникалық жүйелердің математикалық моделі құрастырылды. Жұмыста қосымшаларды құру кезінде АЕЖ кітапханалық функциялары қолданылды.

Роботтар динамикасының теңдеулерін символдық түрде алу және шешу бағдарламасы механиктер үшін ыңғайлы. Пайдаланушы тек анықталған деп санайтын параметрлерді орнатады, қалған жүйе айнымалылармен ауыстырылады. Әрі қарай, алынған теңдеулер мен шешімдерде пайдаланушы жалпыланған күштерді есептеу үшін жалпыланған координаттар мен басқа параметрлердің нақты мәндерін алмастыра алады. Барлық аралық матрицалар, энергия теңдеулері және т. б. есептеледі.

4 ИНТЕРВАЛДЫҚ ФУНКЦИЯЛАР КІТАПХАНАСЫ

ЭЕМ-ге арналған бағдарламалық қамтамасыз ету: «Интервалдық функциялар кітапханасы» интервалдық есептеулер жүргізуге арналған.

Іске асыратын ЭЕМ түрі. Ұсынылатын талаптар: Pentium/AMD, тактілік жиілігі – 2 ГГц – тен төмен емес, ЖЖҚ – 1 ГБ – тан кем емес, қатқыл дискідегі бос орын көлемі-1 ГБ-тан кем емес, операциялық жүйелер-Windows.

Минималды талаптар: Pentium/AMD, тактілік жиілігі – кемінде 600 МГц, жедел жады – кемінде 256 МБ, қатқыл дискідегі бос орын көлемі – кемінде 500 МБ, операциялық жүйелер – Windows.

Дербес электронды-есептеуіш машиналарда аралық есептеулерді жүзеге асыру ұшін C++ тілінде екінші бөлімде қарастырылып өткен аралық есептеулерді жүргізуге және сәйкесінше «классикалық» интервалды есептеулерді жүзеге асыру үшін Intr.cpp және IntrN.cpp кітапханалары қолданылады. Med (медиан - орта) және rad (радиус) нақты өрістері бар жазба болып табылатын Interval жаңа типін енгізу аралықты анықтайды. Vecintr интервалдық векторы Interval типі бар элементтері бар вектор ретінде анықталады. Тиісінше, MatIntr аралық матрицасының тұжырымдамасы анықталды.

Екі *.h кітапханаларында ұқсас алгоритмдерді жүзеге асыратын функциялар мен кіші бағдарламалар IntrN үшін функция атауына «N» таңбасын қосумен ерекшеленеді *.h-кітапханалар. Мысалы, егер Intr-де болса.h кітапханасы екі аралық сандарды қосу процедурасы AddIn, содан кейін IntrN деп аталады.tpu кітапханасында AddInN атауы болады.

Екі *.h кітапханаларында ұқсас алгоритмдерді жүзеге асыратын функциялар мен кіші бағдарламалар IntrN.cpp-кітапхана үшін функция атауына «N» таңбасын қосумен ерекшеленеді. Мысалы, егер Intr.h-кітапханада екі аралық санды қосу процедурасы AddIn деп аталса, онда IntrN.h-кітапханада AddInN атауы болады.

Құрылған кітапханаларда келесі процедуралар мен функциялар жүзеге асырылады:

1) void AddIn(Interval a, Interval b, Interval *c) – a және b екі интервалды сандарды қосу процедурасы; c интервалды айнымалыдағы нәтиже;

2) void SubIn(Interval a, Interval b, Interval *c) – a интервал санынан в санын шегеру процедурасы; c интервал айнымалысындағы нәтиже;

3) void MultIn(Interval a, Interval b, Interval *c) – a және b екі интервалды сандарды көбейту процедурасы; c интервалды айнымалыдағы нәтиже;

4) int DelIn(Interval a, Interval b, Interval *c) – a және b екі интервалдық сандарды бөлу функциясы; c интервалдық айнымалыдағы нәтиже; егер бөлгіш (b) интервалында нөл болса, онда функция 0 мәнін қайтарады; әйтпесе 1 мәнін қайтарады (қалыпты аяқтау, c нәтижесінде);

5) void SwapInt(Interval *a, Interval *b) – a және b аралықтары арасындағы мәндерді алмасу процедурасы; {a аралығын қатаң 0.0 интервалының сол жағында тексеру}

6) bool LgInt(Interval a) – a интервалының қатаң түрде 0.0-дің сол жағында орналасуын тексеру функциясы

7) bool LeInt(Interval a) – 0.0-дің сол жағындағы a аралығының орналасуын тексеру функциясы

8) bool GtInt(Interval a) – 0.0 сол жағындағы a аралығының орналасуын тексеру функциясы

9) bool GeInt(Interval a) – 0.0 оң жағындағы a аралығының орналасуын тексеру функциясы

10) bool EqInt(Interval a) – a интервалының ортасы нөлге тең екендігін тексеру функциясы.

11) boolNeInt(Interval a) – a интервалының ортасындағы теңсіздікті тексеру функциясы нөлге тең.

12) bool VxodSchInt(Interval a, float *b) – b нақты санының a аралығына тиесілігін тексеру функциясы.

13) void DetIntr(MatIntr a, int n, Interval *c) – a аралық матрицаның детерминантын есептеу процедурасы; n-матрицаның өлшемі; c аралық айнымалыдағы нәтиже;

14) int MinvIntr(MatIntr a, int n, MatIntr *b) – квадрат аралық матрицаның айналу процедурасы a; n-матрицаның өлшемі; нәтиже в квадрат аралық матрицада және minvintr айнымалысында (MinvIntr = 1, есептеулер қалыпты аяқталған кезде және MinvIntr = 0, егер кері матрица болмаса);

15) void MultMatVecIntr(MatIntr a, VecIntr b, int n, VecIntr *c) – a интервалдық матрицасын b интервалдық векторына көбейту процедурасы; N-матрицаның өлшемі; c интервалдық векторындағы нәтиже;

16) void AddMatIntr(MatIntr a, MatIntr b, int n, MatIntr *c) – a және b екі аралық матрицаны қосу процедурасы; N-матрицаның өлшемі; c аралық матрицадағы нәтиже;

17) void SubMatIntr(MatIntr a, MatIntr b, int n, MatIntr *c) – a және b екі интервалдық матрицаны шегеру рәсімі; N-матрицаның өлшемі; c интервалдық матрицадағы нәтиже;

18) void MultMatIntr(MatIntr a, MatIntr b, int n, MatIntr *c) – a және b екі аралық матрицаны көбейту процедурасы; N-матрицаның өлшемі; c аралық матрицадағы нәтиже;

19) void SledMatIntr(MatIntr a, int n, Interval *c) – аралық матрицаның ізін есептеу процедурасы a; n-матрицаның өлшемі; c интервалдық айнымалыдағы нәтиже;

20) void SlayQQInt(MatIntr a, int n, VecIntr *b, int *IER) – негізгі элементті таңдаумен Гаусс әдісімен сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу процедурасы: мұнда a-бастапқы жүйенің сол жағын анықтайтын интервалдық матрица

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

n-матрицаның өлшемі; b-бастапқы жүйенің оң жақ бөліктерінің интервалдық векторы, нәтиже оған қайтарылады; IER-теңдеулер жүйесін шешу шартының коды (0-b нәтиже қайтарылады, 1-бұзылған жүйе);

21) void SlayKrInt(MatIntr a, int n, VecIntr *b, int *IER) – сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін Крамер әдісімен шешу процедурасы: мұнда А - бастапқы жүйенің сол жағын анықтайтын интервалдық матрица; n-матрицаның өлшемі; b-бастапқы жүйенің оң бөліктерінің интервалдық векторы, нәтиже оған қайтарылады; IER-теңдеулер жүйесін шешу шартының коды (0-в нәтиже қайтарылады, 1-бұзылған жүйе);

22) void SlayPrItrnt(MatIntr a, int n, VecIntr b, VecIntr *x, int *IER) – сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін қарапайым Итерация әдісімен шешу процедурасы: мұнда a-бастапқы жүйенің сол жағын анықтайтын аралық матрица:

$$x = \boldsymbol{A}x + b$$

n-матрицаның өлшемі; b-бастапқы жүйенің оң жақ бөліктерінің интервалдық векторы, x-шешімнің интервалдық векторы; IER-теңдеулер жүйесін шешудің шарт коды (0-в b нәтиже қайтарылады, 1-бұзылған жүйе);

23) void XarPolFadInt(MatIntr a, int n, VecIntr *b) – a интервалдық матрицасының сипаттамалық көпмүшесінің коэффициенттерін Фадеев әдісімен есептеу рәсімі; N-матрицаның өлшемі; с интервалдық векторындағы нәтиже;

24) void XarPolLevInt(MatIntr a, int n, VecIntr *b) – a интервалдық матрицасының сипаттамалық көпмүшесінің коэффициенттерін Леверье әдісімен есептеу рәсімі; N-матрицаның өлшемі; с интервалдық векторындағы нәтиже;

25) void XarPolDanInt(MatIntr a, int n, VecIntr *b) – Данилевский әдісімен a интервалдық матрицасының сипаттамалық көпмүшесінің коэффициенттерін есептеу процедурасы; N-матрицаның өлшемі; с интервалдық векторындағы нәтиже;

26) void XarPolKriInt(MatIntr a, int n, VecIntr *b) – a интервалдық матрицасының сипаттамалық көпмүшесінің коэффициенттерін Крылов әдісімен есептеу рәсімі; N-матрицаның өлшемі; с интервалдық векторындағы нәтиже;

27) void RausGurvizInt(MatIntr a, int n, VecIntr *b) – a интервалдық көпмүшенің сипаттамалық коэффициенттері негізінде құрылған Раус-Гурвиц интервалдық матрицасының негізгі минорларының детерминанттарын есептеу процедурасы; N-матрицаның өлшемі; B интервалдық векторындағы нәтиже.

28) void GurvizInt(VecIntr a, int n, int *Igr) – Гурвиц критерийі негізінде а сипаттамалық аралық көпмүшенің тұрақтылығын анықтау рәсімі; n-көпмүшенің дәрежесі;

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

нәтиже тұрақтылық жағдайында Igr =0 және тұрақсыздық жағдайында Igr =1.

29) void RausInt(VecIntr a, int n, int *Igr) – Раус критерийі негізінде а сипаттамалық аралық көпмүшенің тұрақтылығын анықтау рәсімі; n-көпмүшенің дәрежесі;

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

нәтиже тұрақтылық жағдайында Igr=0 және тұрақсыздық жағдайында Igr > 0.

30) float VgrPolInt(VecIntr a, int n) – аралық нақты коэффициенттері бар a көпмүшесінің түбірлік модульдерінің жоғарғы шекарасын анықтау функциясы (N-көпмүшенің дәрежесі);

31) float VgrPolPolInt(VecIntr a, int n) – аралық нақты коэффициенттері бар a полиномының оң нақты тамырларының жоғарғы шекарасын анықтау функциясы (N-полином дәрежесі);

32) void KrGerhInt(MatIntr a, int n, float *Cmin, float *Cmax) – a интервалдық матрицаның меншікті мәндерін Гершгорин әдісімен локализациялау процедурасы}; N-матрицаның өлшемі; Cmin және Cmax нақты типтегі айнымалылардағы нәтиже;

33) int PolSchInt(VecIntr a, int n) – Д. Шильяк әдісімен аралық көпмүшенің (коэффициенттері a интервалдық векторында берілген; N – көпмүшелік дәрежесі) позитивтілігін анықтау; нәтижесі 0 егер көпмүшелік болса

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_{n-1} w + a_n \tag{4.1}$$

34) int PolPolInt(VecIntr a, int n) – С.А. Айсағалиев әдісімен интервалдық көпмүшенің (коэффициенттері a интервалдық векторында берілген ; N – көпмүшелік дәрежесі) позитивтілігін анықтау; 0 нәтиже, егер көпмүшелік (4.1) барлық w>0 үшін оң болса және 1 нәтиже, егер көпмүшелік барлық w>0 үшін оң болмаса.

35) int RauthMInt(VecIntr a, VecIntr b, int n) – аралық көпмүшелер бойынша құрылған Раус матрицасындағы таңбаның өзгеру санын анықтау (коэффициенттері a интервалдық векторында және оның туындысы b берілген; n – көпмүшенің дәрежесі); нәтижесі – таңбаның өзгеру саны.

36) int YpravInt(MatIntr a, VecIntr b, int n) – a интервалдық матрицасы мен b интервалдық векторының басқарылуын анықтау (мұндағы n – матрицаның өлшемі); нәтиже: YpravInt =1 – егер жұп (a, b) басқарылса және YpravInt =0 – егер жұп (a, b) басқарылмаса.

37) void PopovInt(VecIntr a, VecIntr b, int n, Interval kf, int kq, int *Ier, Interval *q) – В.М. Попов критерийі негізінде сызықты емес жүйенің абсолютті тұрақтылығын анықтау рәсімі; a – жүйенің сызықтық бөлігінің беру функциясы деноминаторының коэффициенттері; n – көпмүшелік дәрежесі; b – жүйенің сызықтық бөлігінің беру функциясы алымының коэффициенттері; KF – жүйенің сызықтық емес бөлігіне шектеулер; kq – Попов параметрін есептеу әрекеттерінің максималды саны; нәтиже тұрақтылық жағдайында Ier =0 және тұрақсыздық жағдайында Ier =1 (Попов параметрін есептеу әрекеттерінің берілген саны үшін). q аралығындағы айнымалы тұрақтылық жағдайында В.М.Попов параметрінің мәні қайтарылады.

38) void PopovNInt(VecIntr a, VecIntr b, int n, int m, int kq, Interval kf, int *Ier, Interval *q) – В. М. Попов критерийі негізінде сызықты емес жүйенің абсолютті тұрақтылығын анықтау рәсімі; a – жүйенің сызықтық бөлігінің беру функциясы деноминаторының коэффициенттері; n – көпмүшенің дәрежесі a; b – жүйенің сызықтық бөлігінің беру функциясы алымының коэффициенттері;

m – көпмүшенің дәрежесі b; kf – жүйенің сызықтық бөлігінің жүйенің сызықты емес бөлігі; kq – Попов параметрін есептеу әрекеттерінің ең көп саны; нәтиже тұрақтылық жағдайында Ier =0 және тұрақсыздық жағдайында Ier =1 (Попов параметрін есептеу әрекеттерінің берілген саны үшін). q аралығындағы айнымалы тұрақтылық жағдайында В.М.Попов параметрінің мәні қайтарылады.

39) void SilverIntN(MatIntr a, int n, int *Igr) – Сильвестр өлшемі бойынша а квадрат интервалдық матрицаның оң анықтығын анықтау процедурасы; n – квадрат матрицаның өлшемі; а матрицасы оң анықталмаған жағдайда Igr =1, және Igr=0 болғанда а матрицасы оң анықталған жағдайдағы нәтиже.

40) void ResolvIntN(VecIntr a, int n, VecIntr b, int m, Interval *Rez) – екі интервалды көпмүшенің резольвентін есептеу процедурасы: а дәрежелі n көпмүшесі және b дәрежелі m көпмүшесі. Нәтиже – Rez интервалды айнымалысына екі көпмүшенің резольвент мәні қайтарылады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста келесі теориялық және практикалық нәтижелер алынды:

1) Жаңа интервалды математиканың анықтамасы берілді, олардың қасиеттері зерттелді. Жаңа интервалды математиканы классикалық интервалды математикамен салыстыру жүргізілді;

2) классикалық есептерді шешу негізінде енгізілген интервалды математиканың тиімділігі көрсетілді;

3) сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын динамикалық жүйелерді басқару критерийі тұжырымдалды және дәлелденді; модельдік есептерді шешу негізінде оның тиімділігі көрсетілді;

4) қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын сызықтық емес динамикалық жүйелердің басқарылу критерийі тұжырымдалды және дәлелденді; модельдік есептерді шешу негізінде оның конструктивтілігі мен тиімділігі көрсетілді;

5) әртүрлі қосымшалар үшін математикалық модельдерді құру процесін автоматтандыруға мүмкіндік беретін аналитикалық есептеу жүйесі әзірленді. Атап айтқанда, оның мүмкіндіктері робототехникалық жүйелерді модельдеуде көрсетілді;

6) интервалды функциялар кітапханасы әзірленді, оның негізінде басқарылу критерийінің орындалуын тексеруді қамтамасыз ететін қолданбалы бағдарламалық қамтамасыз ету іске асырылды.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Труды 1-го Международного конгресса ИФАК. – М.: Изд. АН СССР. 1961. – Т. 2. – С. 521-546.
2. Красовский Н.Н. Проблемы управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости динамических систем // «Труды II Всесоюзного съезда по теории и прикладной механике» Москва, 1965. – С. 77-93.
3. Семенов В.Н. Об управляемости нелинейных динамических систем // Кибернетические и вычислительные технологии: Республиканский межведомственный сборник – Киев: Наукова думка, 1971. – Выпуск 8. – С. 34 40.
4. Gershwin S.B., Jacobson D.H. A controllability theory for nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16, № 1. – P.25-36.
5. Hunt L. R. Controllability of nonlinear systems in two dimensions // Math. Syst. Theory. – 1980. – Vol. 13, №4. – P. 361 -376.
6. Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Никитин С.В. Критерии управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях // ДАН СССР. – 1986. – Т. 290, № 1. – С. 18-22.
7. Федоров А.Ю. Условия управляемости нелинейных динамических систем //Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 4. – С. 60 71.
8. Ковалев А.М. Критерий управляемости и достаточные условия стабилизируемости динамических систем // Прикладная математика и механика – Москва, 1995. – Т. 59., № 3. – С. 401 409.
9. Мастерков Ю.В. О глобальной устойчивой управляемости // Удмуртский государственный университет. Известия Института математики и информатики. – 1997. – № 1. – С. 67 76.
10. Wenbing Zhang, Qing-Long Han, Yang Tang, Yurong Liu. Sampled-data control for a class of linear time-varying systems // Automatica. – 2019. – Vol.103, P. 126-134.
11. Francesco Boarotto, Mario Sigalott. Dwell-time control sets and applications to the stability analysis of linear switched systems // Journal of Differential Equations. – Vol. 268, Issue 4. – 5 February 2020. – P. 1345-1378.
12. Víctor Ayala, Adriano Da Silva, Philippe Jouan, Guilherme Zsigmond. Control sets of linear systems on semi-simple Lie groups” // Journal of Differential Equations. – Vol. 269, Issue 1. – 15 June 2020. – P. 449-466.
13. Yuanchao Si, JinRong Wang, Michal Fečkan. Controllability of linear and nonlinear systems governed by Stieltjes differential equations». // Applied Mathematics and Computation. – Vol. 376. – 1 July 2020. – P.125-139.
14. Takuya Ikeda, Masaaki Nagahara. Time-optimal hands-off control for linear time-invariant systems // Automatica. – Vol. 99. – January 2019. – P. 54-58.
15. Filippo Cacace, Francesco Conte, Massimiliano d’Angelo, Alfredo Germani. Feedback polynomial filtering and control of non-Gaussian linear time-

varying systems // Systems & Control Letters. – Vol. 123. – January 2019. – P. 108-115.

16. Зубов В.И. Динамика управляемых систем. – М.: Высшая школа, 1982. – 285 с.

17. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

18. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 415 с.

19. Джумабаев Д.С. Краевые задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Диссертация кандидата физико-математических наук: 01.01.02. – Дифференциальные уравнения и математическая физика, Алма-Ата, 1980. – 88 с.

20. Айсагалиев С.А. Анализ и синтез автономных нелинейных систем автоматического управления. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1980. – 244 с.

21. Калимолдаев М.Н., Бияров Т.Н. Устойчивость систем автоматического управления при постоянно действующих возмущениях. – Алматы: Министерство печати и массовой информации РК, 1995. – 126 с.

22. Калимолдаев М.Н. К управляемости и устойчивости нелинейных многомерных фазовых систем. – Алматы: Наука, 1996. – 72 с.

23. Мурзабеков З.Н., Мирзахмедова Г.А. Построение ограниченного управления для одного класса нелинейных систем с коэффициентами, зависящими от состояния объекта управления //Проблемы математического анализа. – Новосибирск. – Выпуск 104. – 2020. – С.69-74.

24. Мазаков Т.Ж., Джомартова ША. Применение интервальной математики к анализу управляемости систем // Математическое и компьютерное моделирование систем и процессов. – Гродно: ГрГУ. – 2013. – С.110-114.

25. Каюмов О.Р. Глобально управляемые механические //Автореф. диссер. доктор. физ-мат. наук, спец. 01.02.01 – Теоретическая, Тараз, 2007. – 32 с.

26. Хрящев С.М. Модели и методы исследования управляемости систем с регулярным и хаотическим поведением // Автореф. диссер. доктор. физ-мат. наук, спец. 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, Санкт-Петербург, 2006. – 34 с.

27. Квитко А.Н. Методы решения краевых задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и их применение при решении задач управления движением центра масс летательного аппарата //Автореф. диссер. доктор. физ-мат. наук, спец. 01.01.11 – системный анализ и автоматическое управление, Санкт-Петербург, 1992. – 30 с.

28. Гладкова И.В. Управляемость механических систем с ограничениями на управление и фазовый вектор с приложением к динамике твердого тела //Автореф. диссер. кандидата физ-мат. наук, спец. 01.02.01 – теоретическая механика, Донецк, 1993. – 10 с.

29. Семенов Ю.М. Конструктивные методы анализа множеств управляемости и достижимости динамических систем//Автореф. диссер.

доктор. физ-мат. наук, спец. 01.01.02 – дифференциальные уравнения, Чебоксары, 2010. – 32 с.

30. Сачков Ю.Л. Управляемость и оптимальное управление для инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах // Автореф. диссер. доктор. физ-мат. наук, спец. 01.01.02 – дифференциальные уравнения, Москва, 2007. – 23 с.

31. Десяев Е.В. Математическое моделирование динамики управляемых систем// Автореф. диссер. кандидата физ-мат. наук, спец. 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, Саранск, 2012. – 19 с.

32. Moor R.E. Interval analysis // Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, 1966.

33. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1986. – 224 с.

34. Назаренко Т.И., Марченко Л.В. Введение в интервальные методы вычислительной математики. – Иркутск: Издательство Иркутского университета, 1982. – 108 с.

35. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 224 с.

36. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы) I,II // Изв. РАН Техн. кибернетика. – 1991. - №1, № 2. – С. 3-30.

37. Алефельд Г., Херцберген Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

38. Шарая И.А. О дистрибутивности в классической интервальной арифметике //Вычисл. технол. – 1997. – №1. – С.71-83.

39. Стоян Ю.Г. Интервальные отображения //Доп. АН Украіни,1996. – №10. – С.57-63.

40. Interval extensions of nonsmooth functions for global optimization and nonlinear systems solvers. / Baker Kearfort.R// Computing. – 1996. – №2. – С.149-162.

41. Добронец Б.С., Шайдуров В.В. Двусторонние численные методы. – Новосибирск: Наука, 1990. – 208 с.

42. Intervallmathematische Methoden in der Prorebtechnik – Flexibulitat und Unscharfe/ Gruhn Dunter, Colditz Stefan// Chem. – Ing. – Mechn. – 1996. – IV5. - P.509-517.

43. Ляшко М.А. Один способ нахождения асимптотического фактора сходимости полношагового итерационного метода для интервальных СЛАУ //Вычисл. технол. – 1997. – №1. – С.37-44.

44. Смагина Е.М., Моисеев А.Н., Моисеева С.П. Методы вычисления коэффициентов ИХП интервальных матриц //Вычислительные технологии. – 1997.– Т2, № 1. – С. 52-61.

45. Подчукаев В.А., Светлов И.М. Аналитический метод построения гурвицевых интервальных полиномов //Автоматика и телемеханика. – 1996. – №2. – С.89-100.

46. Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. О положительной определенности интервальных семейств симметрических матриц //Автоматика и телемеханика. – 2000. – №8. – С.5-10.

47. Зубов Н.Е., Микрин Е.А. Эквивалентность условий управляемости линейной многомерной системы и разрешимости полиномиального матричного уравнения Сильвестра. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. – 2016. – №1 – С.51-58.

48. Партушев С.Б. Повышение точности интервальных оценок отклонений напряжения в электрических сетях общего назначения //Вычислительная технология. – 1997. – №1. – С.45-51.

49. Белов В.М., Суханов В.А., Лагутина Е.В. Интервальный подход при решении задач кинетики простых химических реакций //Вычисл. технол. – 1997. – №1. – С.10-18.

50. Молчанов А.П., Морозов М.В. Достаточные условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем, управления с периодическими интервальными ограничениями // Автоматика и телемеханика. – 1997. – №1. – С.100-107.

51. Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. К задаче управления в интервальных логико-динамических системах // Вычисл.технол. – 1997. – №5. – С.91-96.

52. Шарый С.П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных // Вычислительные технологии. – 1997. – Т2, № 1. – С. 84-102.

53. Шарый С.П. Новый подход интервальной глобальной оптимизации // Труды Международной конференции «Вычислительная технология». – Новосибирск, 2001. – http://www. ict.nsc.ru//ws/CoToMM.

54. Jiaxin Wu, Xin Jin, Shuo Mi, Jinbo Tang. An effective method to compute the box-counting dimension based on the mathematical definition and intervals // Results in Engineering. – Volume 6. – June 2020. – P.100-106.

55. Erivelton G. Nepomuceno, Heitor M. Rodrigues Junior, Samir A.M. Martins. Interval computing periodic orbits of maps using a piecewise approach // Applied Mathematics and Computation. – 1 November 2018. – Vol. 336. – P. 67-75.

56. Xian Zhang, Jianfeng Cai, Yimin Wei. Interval iterative methods for computing Moore–Penrose inverse // Applied Mathematics and Computation. – 1 December 2006. – Vol. 183. – Issue 1. – P. 522-532.

57. Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А. Применение интервального анализа в практических вычислениях // Вычислительные технологии. – 2002. – т.7, ч.3. – С.230-234.

58. Clarke, E. M., Analytica: an experiment in combining theorem proving and symbolic computation / Edmund Clarke, Xudong Zhao. – Pittsburgh, Pa: School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1992. – 19 p.

59. Advances in robot kinematics: with emphasis on symbolic computation / S. Stifter and J. Lenarcic (eds.). – Wien : New York; Springer-Verlag, 1991. – 379 с.

60. Арайс Е.А., Сибиряков Г.В. Авто-аналитик. – Новосибирск, 1973. – 284 с.

61. Арайс Е.А., Яковлев Н.Е. Автоматизация аналитических вычислений в научных исследованиях. – Новосибирск: Наука, 1985. – 222 с.

62. Дьяконов В.П. Справочник по применению системы Derive. – М.: Наука, 1996. – 143 с.

63. Дьяконов В.П. Справочник по применению системы Eureka. – М.: Наука, 1993. – 96 с.

64. Щоголев Е. Симполиз-64 – язык для программирования в символьных обозначениях. – М.: Наука, 1965 – 60 с.

65. Маслова А.Н., Стоцкого Э.Д. Языки и автоматы. Сборник переводов под ред. – М., Мир, 1975. – 361 с.

66. Rayna, Gerhard. REDUCE: software for algebraic computation. – New York: Springer –Verlag, 1987. – 329 p.

67. Hearn A.C. Reduce-2: A System and language for Algebraic manipulation. //In: Proceeding of the Second Symposium on Symbolic and algebraic Manipulation. – Los-Angeles. – 1971. – P.128-133.

68. Дьяконов В.П. Системы компьютерной алгебры Derive: Самоучитель и руководство пользователя. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 320 с.

69. Зюзьков В.М. Компьютерная алгебра. – Томск: Изд-во Томского университета, 2014. – 350 с.

70. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

71. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 396 с.

72. Васильев А.Б., Тихонов Н.А., Интегральные уравнения. – М.: МГУ, 1989. -156 с.

73. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова Думка, 1986. – 544с.

74. Джомартова Ш.А. «Практические» интервальные вычисления // Вестник НАН РК. – 2002. – №2. – С.41-46.

75. Мазаков Т.Ж., Джомартова Ш.А., Оспанова М.К. Библиотека процедур интервальной математики // Материалы 1-й междунар. Научно-практ. конф. «Информатизация общества». – 2004 . – С.160-162.

76. Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K. S. Controllability of linear dynamical systems. // Contributions to the Theory of Differential Equations. 1963. Vol. I, No. 2. P. 189 – 213.

77. Черноруцкий Г.С., Сибрин А.П., Жабреев В.С. Следящие системы автоматических манипуляторов. – М.: Наука, 1987. – 272 с.

78. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
79. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
80. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1989. – 447 с.
81. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 332 с.
82. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. – М.: Химия, 1976. – 464 с.
83. Кафаров В.В., Глебов С.А. Математическое моделирование основных процессов химических производств. – М.: Высшая школа, 1991. – 429 с.
84. Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А., Оспанова М.К. К теории оптимального управления химическим реактором //Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2003. – № 5. – С.53-61.
85. Мазаков Т.Ж., Жанабаев Е.З., Джомартова Ш.А. Критерий управляемости нестационарных линейных систем //Вестник МОН-НАН РК. – 2003. – № 1. - С.
86. Борисов О.И., Громов В.С., Пыркин А.А. Методы управления робототехническими приложениями. – СПб.: Ун-т ИТМО, 2016. – 108 с.
87. Бурдаков С.Ф., Дьяченко В.А., Тимофеев А.Н. Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов. – М.: Высшая Школа, 1986. – 264 с.
88. Механика промышленных роботов. В трех книгах. Кн.3. Основы конструирования / Под ред. Фролова К.В., Воробьева Е.И. – М.: Высшая Школа, 1989. – 383 с.
89. Бербюк, В. Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем / В.Е. Бербюк. – М.: Наукова думка, 2014. – 192 с.
90. Дэвенпорт Дж., Сира И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. – М.: Мир, 1991. – 352 с.
91. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. – М.: Наука, 1989. – 215 с.
92. Еднерал В.Ф., Крюков А.Н., Родионов А.Я. Язык аналитических вычислений REDUCE. – М.: МГУ, 1989. – 78 с.
93. Закс М.Б. Аналитические преобразования на ЕС ЭВМ. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-т, 1981. – 224 с.
94. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллинза, Р. Лооса. – М.: Мир,1986. – 392 с.
95. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990. –384 с.

ҚОСЫМША А

(Авторлық құқық нысанына құқықтарды мемлекеттік тіркеу туралы 1-куәлік)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

СВИДЕТЕЛЬСТВО

О ВНЕСЕНИИ СВЕДЕНИЙ В ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РЕЕСТР ПРАВ НА ОБЪЕКТЫ, ОХРАНЯЕМЫЕ АВТОРСКИМ ПРАВОМ

№ 7632 от «21» января 2020 года

Фамилия, имя, отчество, (если оно указано в документе, удостоверяющем личность) автора (ов): **ЗИЯТБЕКОВА ГУЛЗАТ ЗИЯТБЕККЫЗЫ, МАЗАКОВ ТАЛГАТ ЖАКУПОВИЧ, ДЖОМАРТОВА ШОЛПАН АБДРАЗАКОВНА, МАЗАКОВА ӘЙГЕРІМ ТАЛҒАТҚЫЗЫ, КАРЫМСАКОВА НУРГУЛЬ ТЛЕТАЕВНА, ТҰРСЫНБАЙ АЙСҰЛУ ТАУАСАРҚЫЗЫ, САМЕТОВА АЙГЕРІМ АЙДАРҚЫЗЫ**

Вид объекта авторского права: **программа для ЭВМ**

Название объекта: **Система Аналитических Вычислений**

Дата создания объекта: **05.01.2020**

Куәлік түпнұсқалығын http://www.kazpatent.kz/ru/ сайтының "Авторлық құқық" бөлімінде тексеруге болады https://copyright.kazpatent.kz

Подлинность документа возможно проверить на сайте kazpatent.kz в разделе «Авторское право» https://copyright.kazpatent.kz

Подписано ЭЦП Оспанов Е. К.

(Авторлық құқық нысанына құқықтарды мемлекеттік тіркеу туралы 2-куәлік)


ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ

РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

АВТОРЛЫҚ ҚҰҚЫҚПЕН ҚОРҒАЛАТЫН ОБЪЕКТІЛЕРГЕ ҚҰҚЫҚТАРДЫҢ МЕМЛЕКЕТТІК ТІЗІЛІМГЕ МӘЛІМЕТТЕРДІ ЕНГІЗУ ТУРАЛЫ

КУӘЛІК

2020 жылғы «17» қантар № 7576

Автордың (лардың) жөні, аты, әкесінің аты (егер ол жеке басын куәландыратын құжатта көрсетілсе):
ЗИЯТБЕКОВА ГУЛЗАТ ЗИЯТБЕККЫЗЫ, МАЗАКОВА ӘЙГЕРІМ ТАЛҒАТҚЫЗЫ, МАЗАКОВ ТАЛГАТ ЖАКУПОВИЧ, ДЖОМАРТОВА ШОЛПАН АБДРАЗАКОВНА, КАРЫМСАКОВА НУРГУЛЬ ТЛЕТАЕВНА, АМИРХАНОВ БАУЫРЖАН САЙДАШЕВИЧ, ЖОЛМАГАМБЕТОВА БАХЫТГУЛ РЫСБЕКОВНА

Авторлық құқық объектісі: **ЭЕМ-ге арналған бағдарлама**

Объектінің атауы: **Библиотека интервальных функций**

Объектіні жасаған күні: **03.01.2020**

Құжат түпнұсқалығын http://www.kazpatent.kz/ru сайтының "Авторлық құқық" бөлімінде тексеруге болады https://copyright.kazpatent.kz

Подлинность документа возможно проверить на сайте kazpatent.kz в разделе «Авторское право» https://copyright.kazpatent.kz

Подписано ЭЦП

Оспанов Е. К.

ҚОСЫМША Ә

Бағдарлама мәтіні, мысалы Цермело

```
Const n=3;m=100;h=0.05;izik=10;kt=10;
Type Interval=record
       med,rad:real;
      end;
      MatIntr=array[1..n,1..n] of Interval;
      VecIntr=array[0..n] of Interval;
  TForm1 = class(TForm);
  var
  Form1: TForm1;
  x,xk,xn:array[1..m] of VecIntr;
  rr,rm,u:Interval;
  i,j,k,ij:integer;
  r1,r2,r3,r4,r5,r6,x1t,x2t,x3t,h1:real;
  ch:string;
  fotl:TextFile;
odin_p_int,odin_m_int,null_int:Interval;
begin
  odin_p_int.med:=1.0;  odin_p_int.rad:=0.0;
  odin_m_int.med:=-1.0; odin_m_int.rad:=0.0;
  null_int.med:=0.0; null_int.rad:=0.0;
AssignFile(fotl,'d:\yprav.txt');   rewrite(fotl);
  x1t:=3.0; x2T:=4.0; x3t:=0.0;
  u.med:=0.0; u.rad:=0.5;
 {первоначальная траектория}
  for i:=1 to m do begin
    for j:=1 to 3 do xk[i,j].rad:=0.0;
    xk[i,1].med:=(i-1)*x1t/m;
    xk[i,2].med:=(i-1)*x2t/m;
    xk[i,3].med:=(i-1)*x3t/m;
   end;
 {Цикл}
  for k:=1 to izik do begin
   for j:=1 to 3 do begin xn[1,j].med:=1.0;  xn[1,j].rad:=0.0;  end;
  { xn[1,3].med:=0.0;}
   for i:=1 to m-1 do begin
    {1 уравнение}
    rm:=xn[i,1];
    r5:=xk[i,3].med-xk[i,3].rad;  r3:=cos(r5);
    r6:=xk[i,3].med+xk[i,3].rad;  r4:=cos(r6);
    r1:=r3;
    r2:=r4;
```

```
   if (r1>r4) then r1:=r4;
   if (r2<r3) then r2:=r3;
   h1:=(r6-r5)/kt;
   for ij:=1 to kt-1 do begin
    r5:=r5+h1; r3:=cos(r5);
    if (r1>r3) then r1:=r3;
    if (r2<r3) then r2:=r3;
    end;
   r3:=0.5*(r1+r2); r4:=0.5*abs(r2-r1);
   rr.med:=h*r3;    rr.rad:=h*r4;
   AddInN(rm,rr,xn[i+1,1]);

   ch:='r1='+FormatFloat('######0.00',r1)+' ';
   ch:=ch+'r2='+FormatFloat('######0.00',r2)+' ';
   ch:=ch+'rr=('+FormatFloat('######0.00',rr.med)+' ';
   ch:=ch+FormatFloat('######0.00',rr.rad)+') ';
   ch:=ch+'rm=('+FormatFloat('######0.00',rm.med)+' ';
   ch:=ch+FormatFloat('######0.00',rm.rad)+') ';
   ch:=ch+'xn=('+FormatFloat('######0.00',xn[i+1,1].med)+' ';
   ch:=ch+FormatFloat('######0.00',xn[i+1,1].rad)+') ';

{    Writeln(fotl,ch);}
   {2 уравнение}
   rm:=xn[i,2];
   r5:=xk[i,3].med-xk[i,3].rad;  r3:=sin(r5);
   r6:=xk[i,3].med+xk[i,3].rad;  r4:=sin(r6);
   r1:=r3;
   r2:=r4;
   if (r1>r4) then r1:=r4;
   if (r2<r3) then r2:=r3;
   h1:=(r6-r5)/kt;
   for ij:=1 to kt-1 do begin
    r5:=r5+h1; r3:=sin(r5);
    if (r1>r3) then r1:=r3;
    if (r2<r3) then r2:=r3;
    end;
   r3:=0.5*(r1+r2); r4:=0.5*abs(r2-r1);
   rr.med:=h*r3;    rr.rad:=h*r4;
   AddInN(rm,rr,xn[i+1,2]);
   {3 уравнение}
   rm:=xn[i,3];
   rr.med:=h*u.med;    rr.rad:=h*u.rad;
   AddInN(rm,rr,xn[i+1,3]);
```

```
    ch:='k='+IntToStr(k)+' i='+IntToStr(i)+' ';
    ch:=ch+'t='+FormatFloat('######0.00',i*h)+' ';
    r1:=xn[i+1,1].med;r2:=xn[i+1,1].rad;
    ch:=ch+'('+FormatFloat('######0.00',r1)+' ';
    ch:=ch+FormatFloat('######0.00',r2)+') ';
        r1:=xn[i+1,2].med;r2:=xn[i+1,2].rad;
    ch:=ch+'('+FormatFloat('######0.00',r1)+' ';
    ch:=ch+FormatFloat('######0.00',r2)+') ';
        r1:=xn[i+1,3].med;r2:=xn[i+1,3].rad;
    ch:=ch+'('+FormatFloat('######0.00',r1)+' ';
    ch:=ch+FormatFloat('######0.00',r2)+') ';
    Writeln(fotl,ch);
  end;
  for i:=1 to m do for j:=1 to 3 do xk[i,j]:=xn[i,j];
    ShowMessage(ch);
  end;
  CloseFile(fotl);
end.
```

ҚОСЫМША Б

Matlab-та роботқа арналған бағдарлама мәтіні

```
clc
format short
Nm=sym('[0 0 0 0; 0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0]');
A=[Nm Nm; Nm Nm];
B=sym('[0 0 0 0 0 0 0 0]');
F=sym('[0 0 0 0 0 0 0 0]');
i=1;
m=5;
m1=40;
m2=42;
J1=20;
J2=3;
Jc1=2.1;
Jc2=0.7;
L1=0.5;
L2=0.5;
Lc1=0.1;
Lc2=0.1;
k1=25000;
k2=6500;
g=1;
a1=m*(L1*L1+L2*L2)+m1*Lc1*Lc1+m2*(L1*L1+Lc2*Lc2)+Jc1+Jc2+J2/(i*i);
a2=L1*(m*L2+m2*Lc2);
a3=m*L2*L2+m2*Lc2+Jc2;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 u;
A(1,1)=1;
A(2,2)=1;
A(3,3)=a1+2*a2*cos(x2);
A(3,4)=a3+a2*cos(x2);
A(3,8)=J2/i;
A(4,3)=a3+a2*cos(x2);
A(4,4)=a3;
A(5,5)=1;
A(6,6)=1;
A(7,7)=J1;
A(8,8)=J2;
A(8,4)=J2/i;
A
B(1)=x3;
B(2)=x4;
```

```
B(3)=a2*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-k1*x1-(m*L2+m2*Lc2)*g*cos(x1+x2)-
(m1*Lc1+m2*L1+m*L1)*g*cos(x1);
B(4)=a2*x4*(2*x3+x4)*sin(x2)-k2*x6+(m*L2+m2*Lc2)*g*cos(x1+x2);
B(5)=x7;
B(6)=x8;
B(7)=-a2*x3*sin(x2)-k1*x5+u;
B(8)=-a2*x3*sin(x2)-k2*x2+u;
B.'
Ab=inv(A);
Ab
%Disp(Ab);
for ii = 1:8
  ch=0;
  for jj=1:8
      ch=ch+Ab(ii,jj)*B(jj);
  end;
  F(ii)=ch;
end;
F.'
end
```

ҚОСЫМША В

Екі буынды роботқа арналған бағдарлама мәтінінің фрагменті

```
Const n=8; hk=0.05; nv=10; kyr=7;
 Type Interval=record
      med,rad:real;
     end;
     VekInt=array[1..n] of Interval;
  var  xk,xn:VekInt;
  u:Interval;
  x0:array[1..n] of real;
  xr:array[1..n,1..nv] of Interval;
  h,r1,r2,r3,r4,r5:Interval;
  tn,tk,p1,p2,umi,uma:real;
  i,j,k,ik:integer;
  ch,chu1,chu2:string;
  fotl:TextFile;
  Canvas: TCanvas;
   odin_p_int,odin_m_int,null_int:Interval;
{ Обмен интервалов}
 procedure SwapInt(var a,b:Interval);
 var r2:Interval;
 begin
   r2:=a; a:=b; b:=r2;
 end;
{ Сложение интервалов }
 procedure AddInN(a,b:Interval;var c:Interval);
 begin
  c.med:=a.med+b.med;   c.rad:=sqrt(sqr(a.rad)+sqr(b.rad));
  end;
{ Вычитание интервалов }
 procedure SubInN(a,b:Interval;var c:Interval);
 begin
  c.med:=a.med-b.med;   c.rad:=sqrt(sqr(a.rad)+sqr(b.rad));
  end;
{ Умножение интервалов }
 procedure MultInN(a,b:Interval;var c:Interval);
 begin
  c.med:=a.med*b.med; c.rad:=sqrt(sqr(a.med*b.rad)+sqr(b.med*a.rad));
  end;
{ Деление интервалов }
 function DelInN(a,b:Interval;var c:Interval):Integer;
 var r:Interval;
 begin
```

```
 if b.med=0.0 then DelInN:=0
  else begin
   r.med:=1.0/b.med;  r.rad:=b.rad/sqr(b.med);
   MultInN(a,r,c);    DelInN:=1;
  end;
 end;
 { интервальный Синус}
function SinIN(a:Interval):Interval;
var r1,r2,r3,b1,b2,b3,c1,c2:real;
rr: Interval;
begin
 r1:=a.med; r2:= r1-a.rad; r3:=r1+a.rad;
 b1:=sin(r2); b2:=sin(r1); b3:=sin(r3);
 c1:=b1; c2:=b1;
 if (c1>b2) then c1:=b2;
 if (c1>b3) then c1:=b3;
 if (c2<b2) then c2:=b2;
 if (c1<b3) then c2:=b3;
 rr.med:=(c1+c2)/2.0; rr.rad:=(c2-c1)/2.0;
 SinIN:=rr;
 end;
{ интервальный КоСинус}
function CosIN(a:Interval):Interval;
var r1,r2,r3,b1,b2,b3,c1,c2:real;
rr: Interval;
begin
 r1:=a.med; r2:= r1-a.rad; r3:=r1+a.rad;
 b1:=cos(r2); b2:=cos(r1); b3:=cos(r3);
 c1:=b1; c2:=b1;
 if (c1>b2) then c1:=b2;
 if (c1>b3) then c1:=b3;
 if (c2<b2) then c2:=b2;
 if (c1<b3) then c2:=b3;
 rr.med:=(c1+c2)/2.0; rr.rad:=(c2-c1)/2.0;
 CosIN:=rr;
 end;
{ Деление интервалов }

  procedure otlad2(var ch1:string; par:Interval);
  begin
   p1:=par.med;
   p2:=par.rad;
   ch1:=ch1+' = ('+FormatFloat('######0.00',p1-p2)+'; ';
   ch1:=ch1+FormatFloat('######0.00',p1+p2)+')';
```

```
  end;
 procedure otlad(ch1:string; par:Interval);
  var ch2:string;
  begin
   ch2:=ch1; otlad2(ch2,par);
   Writeln(fotl,ch2);
  end;
{ Првая часть системы ОДУ }
 function F(k:Integer;var xn:VekInt):Interval;
 var Cos1,Cos2,Cos12,Cos22,Sin2:Interval;
  rk1,rk2,r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r32,r42,r542,r600,ru,ru2,rr:Interval;
  p1,p2:Interval;
 begin
  Cos1:=CosIn(xn[1]); Cos2:=CosIn(xn[2]); AddInN(xn[1],xn[2],r1);
  Cos12:=CosIn(r1); MultInN(Cos2,Cos2,Cos22); Sin2:=SinIn(xn[2]);
  r1:=null_int; r1.med:=2.0; MultInN(r1,xn[3],r1);
AddInN(r1,xn[4],r1);//r1=(2*x3+x4)
  rk1:=null_int; rk1.med:=3.85; MultInN(rk1,xn[4],rk1);
  MultInN(rk1,r1,rk1); MultInN(rk1,Sin2,rk1);//rk1=3.85*x4*r1*Sin2
  rk2:=null_int; rk2.med:=6.7; MultInN(rk2,Cos12,rk2);//rk2=6.7*Cos12
  r2:=null_int; r2.med:=-202581;  p1:=null_int; p1.med:=-20100.0;p2:=null_int;
p1.med:=22445.0;
  MultInN(p1,Cos2,p1); MultInN(p2,Cos22,p2);
  AddInN(r2,p1,r2); AddInN(r2,p2,r2);   //r2=(-202581-20100*Cos2
+22445*Cos22)
  p1:=null_int; p1.med:=-25000.0;p2:=null_int; p1.med:=-27.5;
  MultInN(p1,xn[1],p1); MultInN(p2,Cos1,p2);
  AddInN(rk1,p1,r3); SubInN(r3,p2,r3); AddInN(r3,p2,r3);  //r3=(rk1 -25000*x1-
rk2-27.5*Cos1)
  p1:=null_int; p1.med:=-6500.0; MultInN(p1,xn[6],p1);
  AddInN(rk1,p1,r4); AddInN(r4,rk2,r4);   //r4=(rk1-6500*x6+rk2)
  r5:=null_int; r5.med:=981.0;  p1:=null_int; p1.med:=335.0;
MultInN(p1,Cos2,p1);
  AddInN(r5,p1,r5);   //r5=(981+335*Cos2)
  r6:=null_int; r6.med:=123.0;  p1:=null_int; p1.med:=67.0; MultInN(p1,Cos2,p1);
  AddInN(r6,p1,r6); //r6=(123+67*Cos2)
  r7:=null_int; r7.med:=63.0;  p1:=null_int; p1.med:=67.0; MultInN(p1,Cos2,p1);
  AddInN(r7,p1,r7);   //r7=(63+67*Cos2)
  r8:=null_int; r8.med:=-165681.0;  p1:=null_int; p1.med:=22445.0;
MultInN(p1,Cos22,p1);
  AddInN(r8,p1,r8);  //r8=(-165681+22445*Cos22)
  DelInN(r3,r2,r32); //r32=r3/r2
  DelInN(r4,r2,r42); //r42=r4/r2
  r542:=null_int; r542.med:=40.0; MultInN(r542,r5,r542);
```

```
  MultInN(r542,r42,r542); //r542=40*r5*r42
  r600:=null_int; r600.med:=600.0; MultInN(r600,r6,r542);  //r600=100*r6
  ru:=null_int; ru.med:=-3.85; MultInN(ru,xn[3],ru);
  MultInN(ru,Sin2,ru);
  p1:=null_int; p1.med:=-3.85; MultInN(p1,xn[2],p1);
  AddInN(ru,p1,ru); AddInN(ru,u,ru);//ru=(  -3.85*x3*Sin2-6500*x2+u)
  DelInN(ru,r2,ru2);    //ru2=ru/r2

  case k of
   1:rr:=xn[3];
   2:rr:=xn[4];
   3: begin     //[-12300*r32+100*r7*r42+12300*ru2]
     rr:=null_int; rr.med:=-12300.0; MultInN(rr,r32,rr);
     p1:=null_int; p1.med:=100.0; MultInN(p1,r7,p1); MultInN(p1,r42,p1);
     p2:=null_int; p2.med:=12300.0; MultInN(p2,ru2,p2);
     AddInN(rr,p1,rr);AddInN(rr,p2,rr);
     end;
   4: begin     //[r600*r32-r542-r600*ru2]
     rr:=r600; MultInN(rr,r32,rr);  SubInN(rr,r542,rr);
     p1:=r600; MultInN(p1,ru2,p1);
     SubInN(rr,p1,rr);
     end;
   5:rr:=xn[7];
   6:rr:=xn[8];
   7: begin     //[  -0.1675*x3*Sin2-1250*x5+0.05*u]
     rr:=null_int; rr.med:=-0.1675; MultInN(rr,xn[3],rr); MultInN(rr,Sin2,rr);
     p1:=null_int; p1.med:=-1250.0; MultInN(p1,xn[5],p1);
     p2:=null_int; p2.med:=0.05; MultInN(p2,u,p2);
     AddInN(rr,p1,rr);AddInN(rr,p2,rr);
     end;
   8: begin     //[-r600*r32+r542 +0.333*r8*ru2]
     rr:=r600; MultInN(rr,r32,rr);
     p1:=null_int; p1.med:=0.333; MultInN(p1,r8,p1);MultInN(p1,ru2,p1);
     SubInN(p1,rr,rr);
     end;
  end; //case
 F:=rr;
 end;
begin
 odin_p_int.med:=1.0;  odin_p_int.rad:=0.0;
 odin_m_int.med:=-1.0; odin_m_int.rad:=0.0;
 null_int.med:=0.0; null_int.rad:=0.0;
AssignFile(fotl,'yprav.txt');   rewrite(fotl);
```

```
x0[1]:=0.0; x0[2]:=0.0; x0[3]:=1.0; x0[4]:=0.5;
x0[5]:=0.0; x0[6]:=0.0; x0[7]:=1.0; x0[8]:=0.5;

u.med:=0.0; u.rad:=0.0;
ch:=' u = ('+FormatFloat('######0.00',u.med)+'; ';
ch:=ch+FormatFloat('######0.00',u.rad)+')';
Writeln(fotl,ch);
umi:=u.med-u.rad; uma:=u.med+u.rad;
chu1:=FormatFloat('######0.00',umi);
chu1:=chu1+'<=U1<='+FormatFloat('######0.00',uma);
Writeln(fotl,chu1);

ch:='x0';
for i:=1 to n do begin
  xn[i].rad:=0.0;
  xn[i].med:=x0[i];
  ch:=ch+' = '+FormatFloat('######0.00',x0[i]);
 end;
Writeln(fotl,ch);
tn:=0.0; tk:=0.5; k:=0;
h.med:=hk; h.rad:=0.0;
ch:=' h = ('+FormatFloat('######0.00',h.med)+'; ';
ch:=ch+FormatFloat('######0.00',h.rad)+') T = '+FormatFloat('####0.00',tk);
Writeln(fotl,ch);
{Цикл}
while tn<=tk do begin
   k:=k+1;
   tn:=tn+hk;
   for ik:=1 to n do     //r1=h*F(k,xn);
      begin
       r1:=F(ik,xn);
       MultInN(h,r1,r2);
       AddInN(xn[ik],r2,xk[ik]);
      end;


  ch:='k=';
  if (k<10) then ch:=ch+'   '
   else
    if (k<100) then ch:=ch+'  '
     else
      if (k<1000) then ch:=ch+' ';
  ch:=ch+IntToStr(k)+' t='+FormatFloat('######0.00',tn);
```

```
    for i:=1 to n do begin
      otlad2(ch,xk[i]);
     end;
    Writeln(fotl,ch);
    if (k<=5) then ShowMessage(ch);
    for i:=1 to n do begin xn[i]:=xk[i]; xr[i,k]:=xk[i]; end;
  end;

CloseFile(fotl);
 ch:='Finish';
 ShowMessage(ch);
end;
```